Netzwerke und Schaltungen I

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Netzwerke und Schaltungen (HS24) von C. Franck, sowie dem Übungsskript von L. Miller.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Falls nicht anders deklariert wurden alle Grafiken eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Kapitel 1

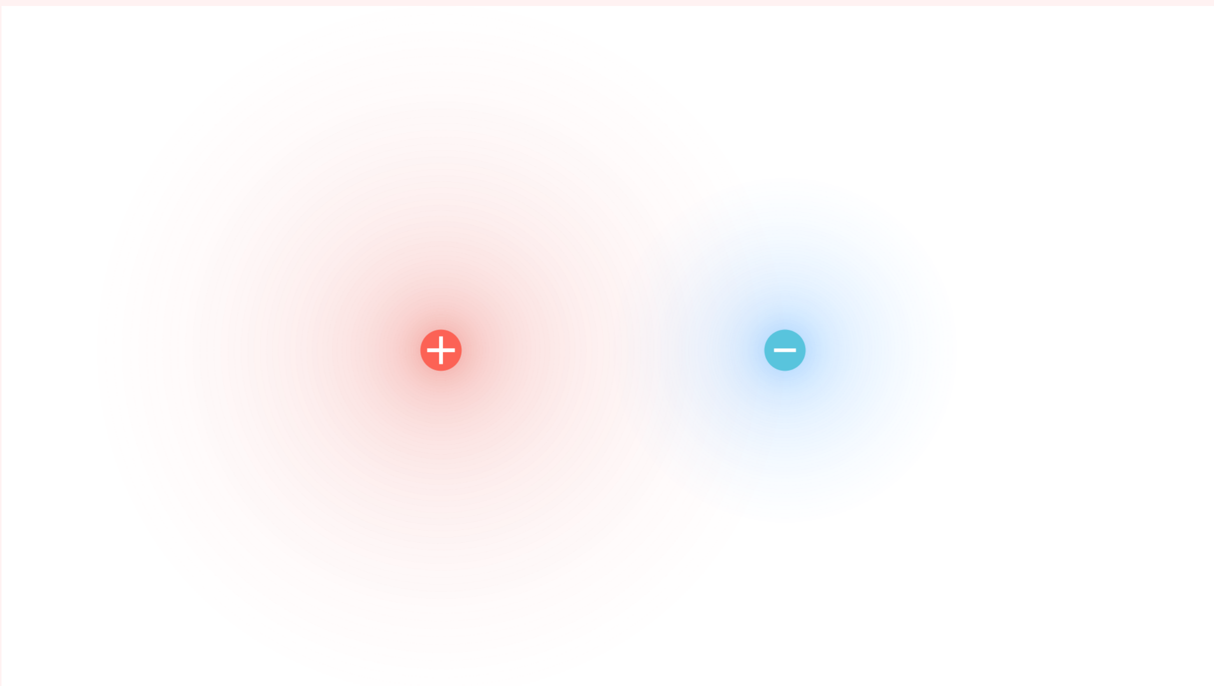
Elektrostatische Feld

1.1 Elektrisches Feld und Coulomb'sche Gesetze

Definition 1.1.1: Elektrische Ladung

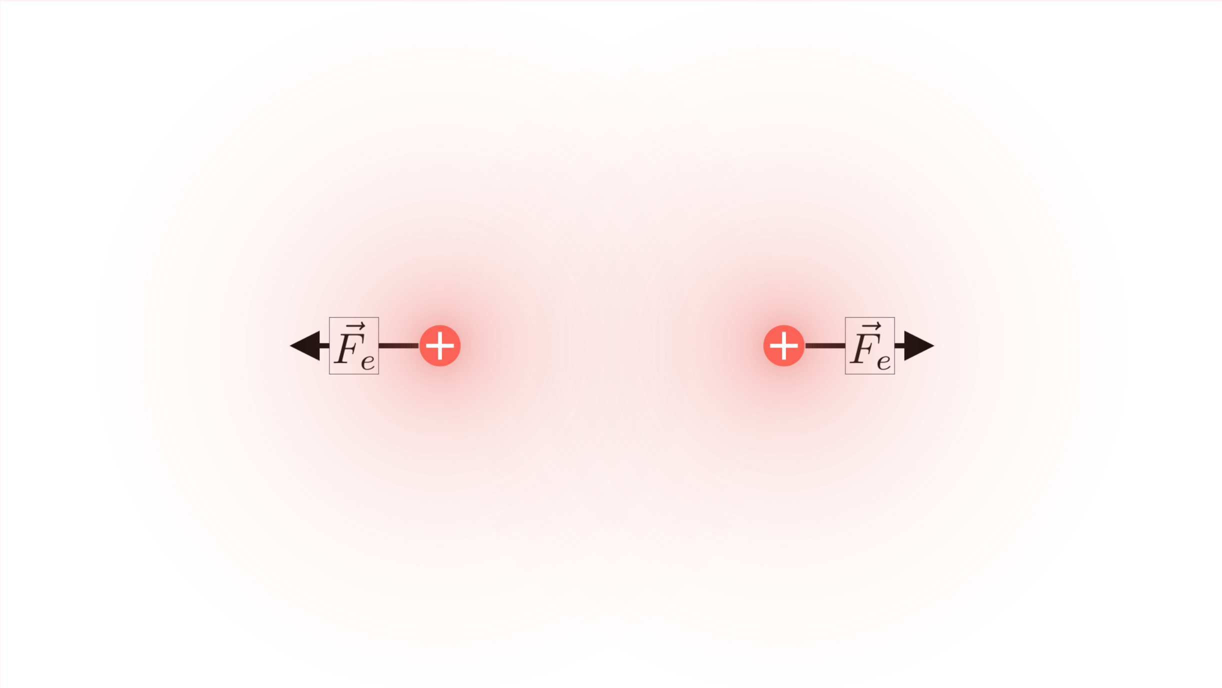
Eine elektrische Ladung ist ein geladenes Teilchen. Dabei gilt folgendes:

- Hat das Teilchen einen Protonenüberschuss, so ist das Teilchen positiv geladen.
- Hat das Teilchen einen Elektronenüberschuss, so ist das Teilchen negativ geladen.

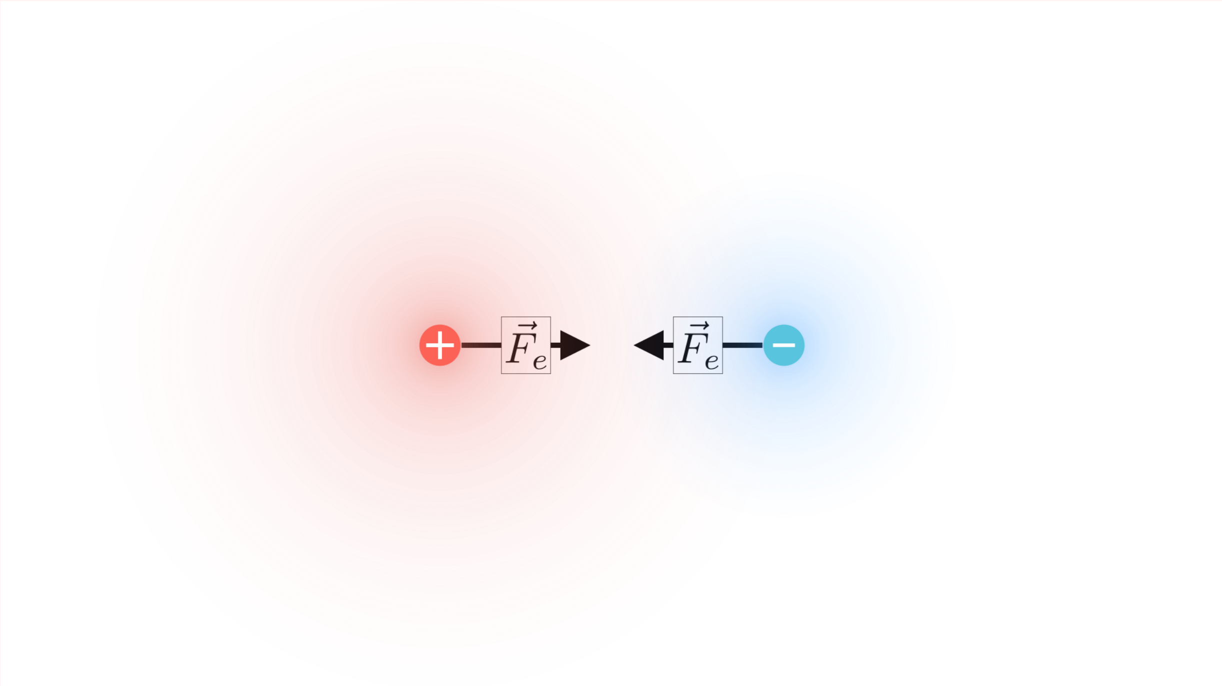


Elektrische Ladungen können abstossende oder anziehende Kräfte haben.

Definition 1.1.2: Kräfte auf Elektrische Ladungen

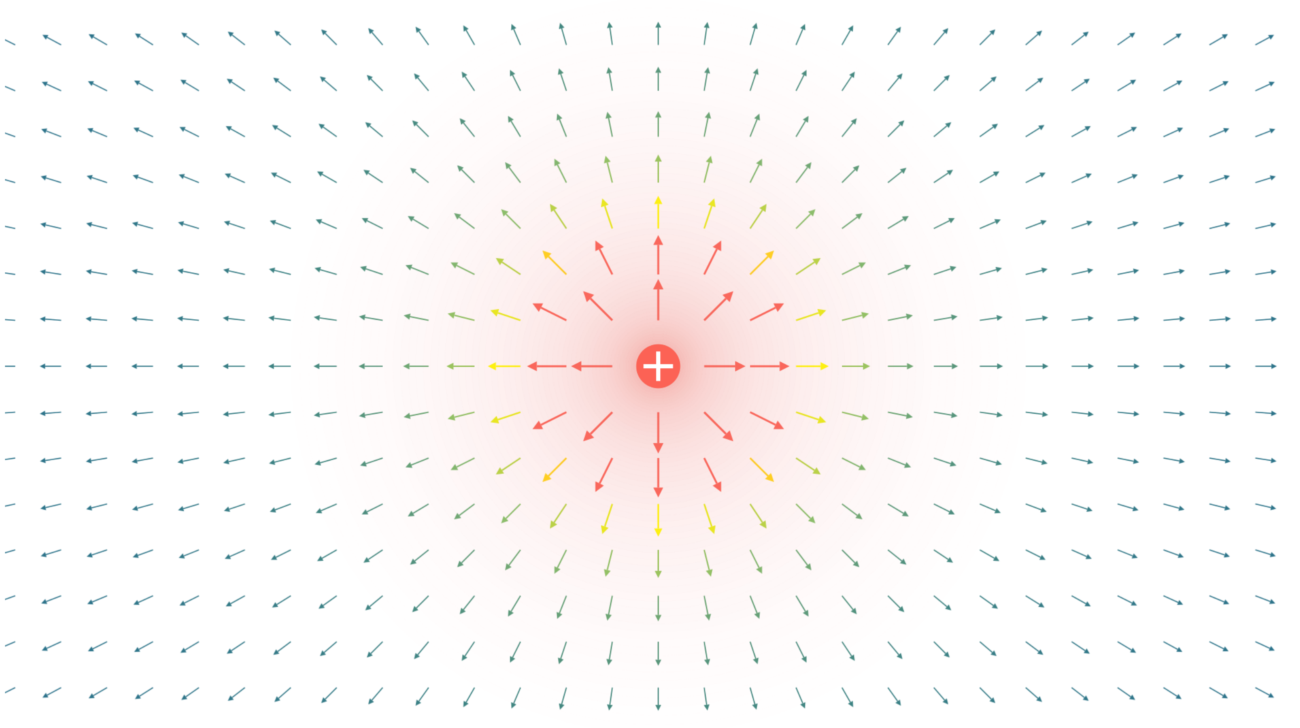


Ist die Ladung der beiden Teilchen gleich, so ist die Kraft abstossend.



Ist die Ladung der beiden Teilchen unterschiedlich, so ist die Kraft anziehend.

Die Kraft von Elektrischen Ladungen kann in einem Vektorfeld dargestellt werden, wobei an jedem Ort die Kraft eine Magnitude und eine Richtung hat. Dieses Feld nennen wir das Elektrische Feld.

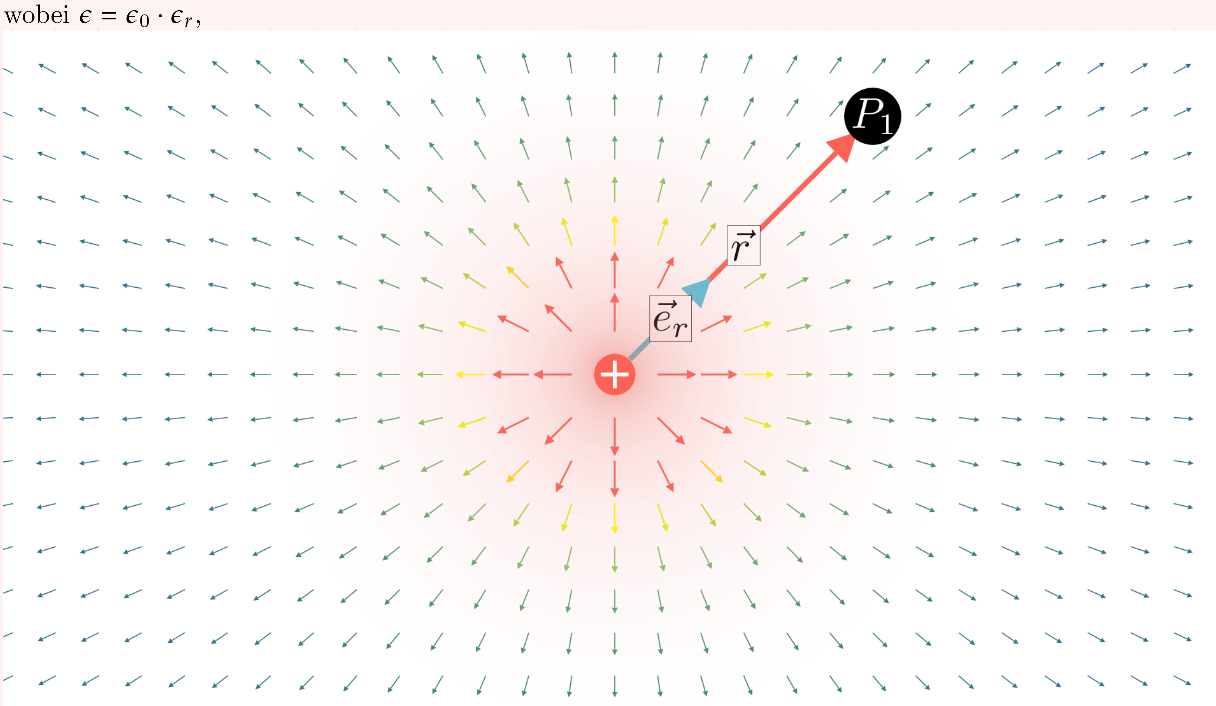


Definition 1.1.3: Elektrisches Feld

Das Elektrische Feld stellt die Kraft einer elektrischen Ladung als Feld dar, wobei man die Magnitude und die Richtung erkennen kann. Sie kann berechnet werden durch:

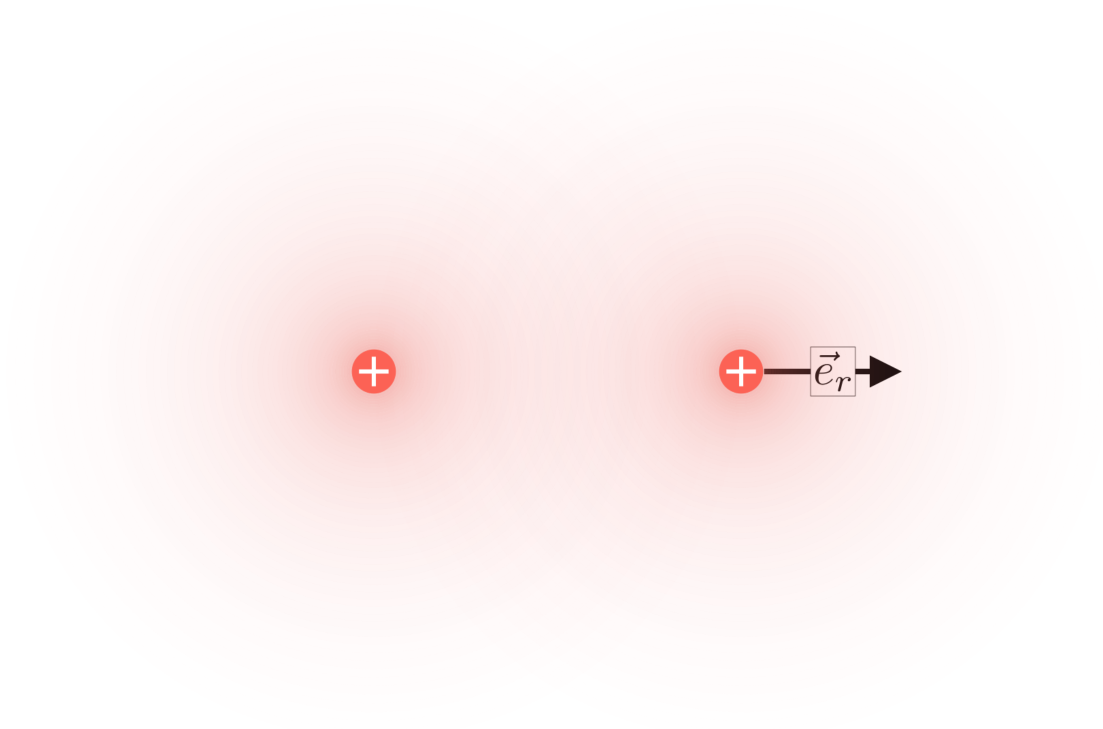
$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} \tag{1.1}$$

wobei $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$,



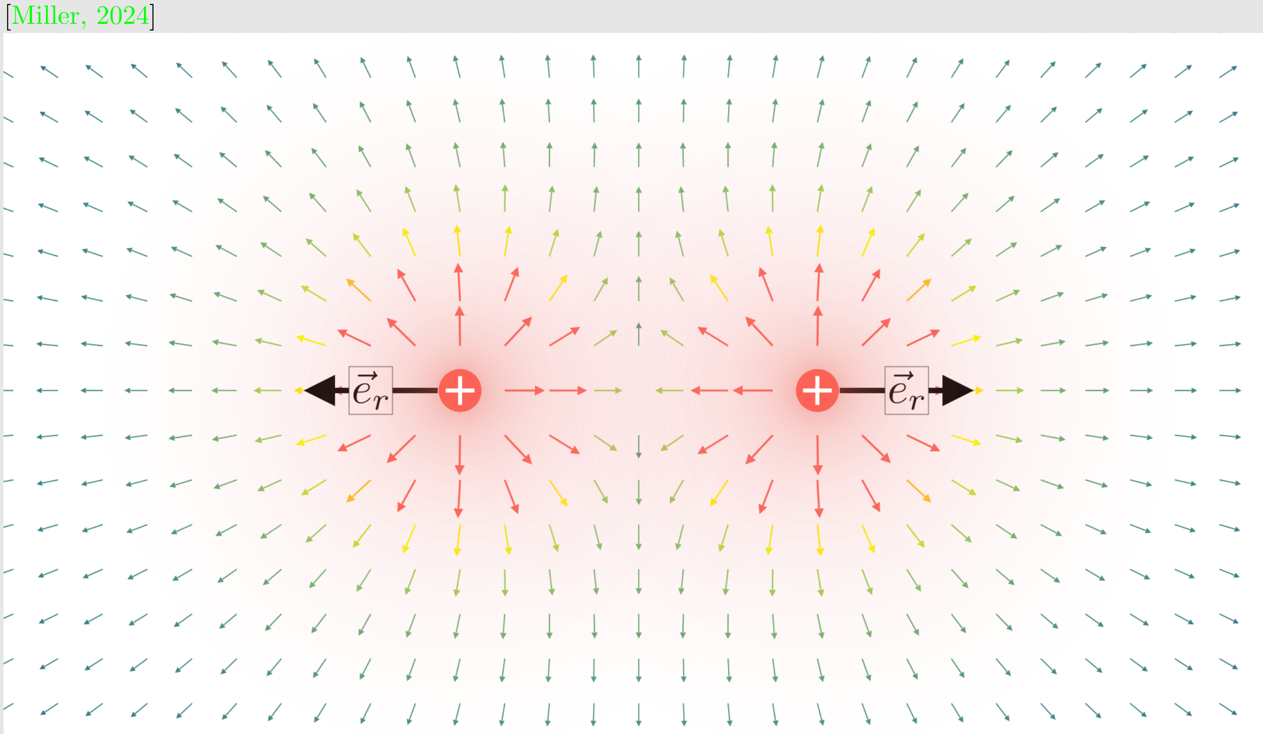
Die Kraft von Elektrische Ladungen kann auf andere elektrische Ladungen eine Kraft ausüben. Die Kraft, die auf eine Ladung Q_2 im Feld der Ladung Q_1 wirkt ist wir folgt definiert. [Miller, 2024]

$$\vec{F}_2 = Q_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{1.2}$$

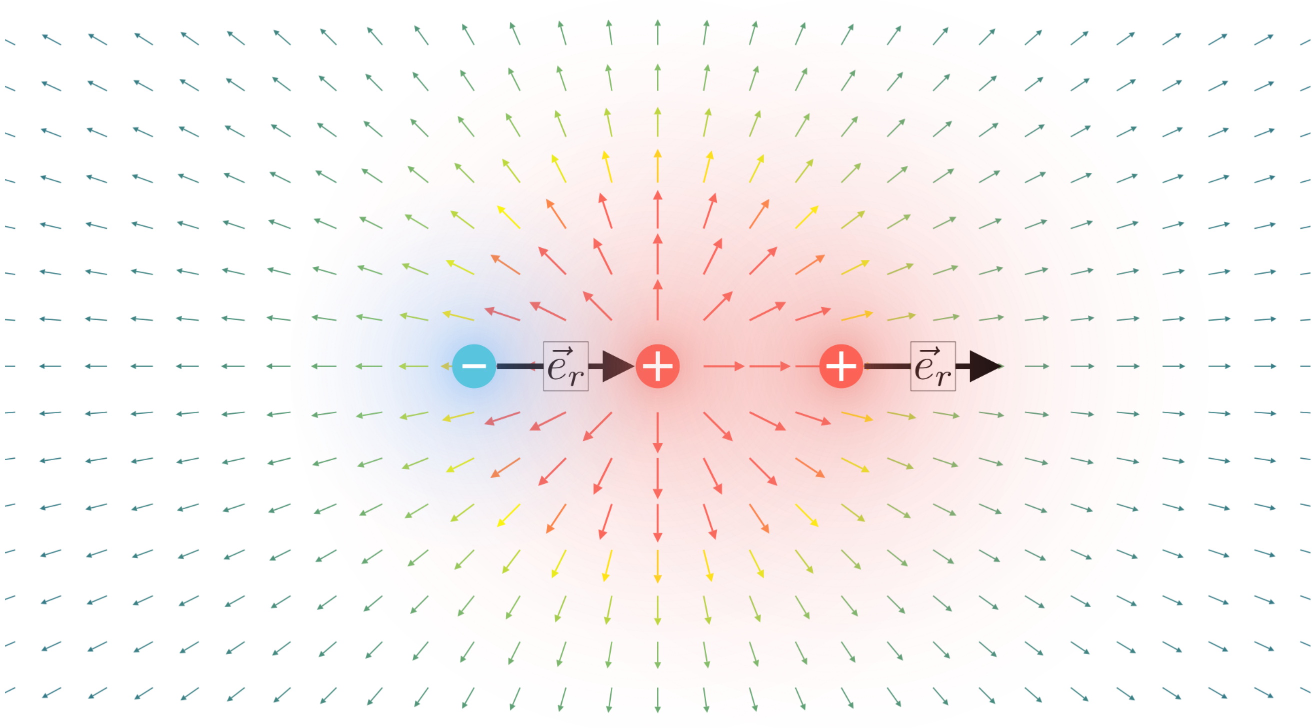


Bemerkung:-

Da jede Ladung sein eigenes E-Feld erzeugt wirken auf zwei Punktladungen immer entgegengesetzte Kräfte. [Miller, 2024]



Wichtig zu bemerken ist, dass die Kraft der positive Ladungen entlang der Feldlinien wirken, während die Kraft der negativen Ladungen gegen die Feldlinien wirken.



1.2 Elektrostatische Potenzial

Wenn wir eine Ladung im elektrischen Feld bewegen, wird Arbeit verrichtet. Diese kann mithilfe vom Integral berechnet werden. Man hat jedoch eine einfachere Methode gefunden.

Definition 1.2.1: Elektrostatische Potenzial

Das elektrostatische Potenzial beschreibt die Fähigkeit von einem elektrischen Feld Arbeit an einer elektrischen Ladung zu verrichten. Das heisst, dass die Arbeit an jedem Punkt des elektrischen Feldes durch das Potenzial beschrieben werden kann.
Somit vereinfacht sich die Berechnung der Arbeit von einem Integral zu einer Multiplikation.

$$W = -\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} d\vec{s} = -Q \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} d\vec{s} = Q \cdot (\varphi_e(P_1) - \varphi_e(P_0)) \tag{1.3}$$

Für das elektrostatische Potenzial gilt des weiteren, dass das Potenzial mit der Distanz zur Ladung abnimmt. Daraus schliesst man, dass das Elektrische Feld die Änderung des elektrisches Potenzials darstellt.

1.3 Spannung

Definition 1.3.1: Spannung

Die elektrische Spannung ist ein Mass für wie viel Arbeit man pro Ladung benötigt, um eine Ladung im elektrischen Feld vom Referenzpotenzial an den gegebenen Ort zu bewegen. [Miller, 2024] Da die Spannung die Differenz der elektrostatischen Potenziale zweier Punkte ist, kann sie wie folgt berechnet werden.

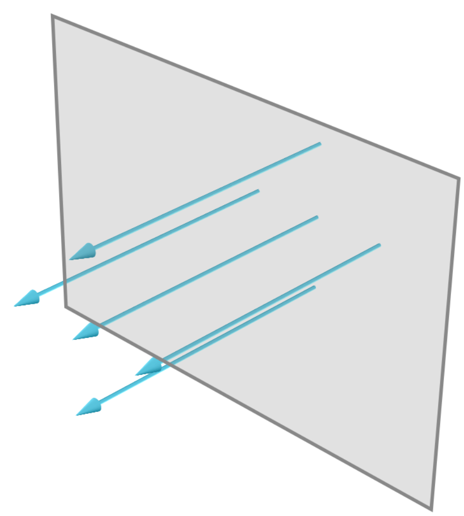
$$W_{12} = -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} = Q \cdot U_{12} = Q \cdot (\varphi(P_1) - \varphi(P_2)) \tag{1.4}$$

1.4 Elektrische Flussdichte

Definition 1.4.1: Elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte beschreibt die die Dichte der elektrischen Feldlinien in Bezug auf eine Fläche. Sie ist eine vektorielle Quantitätsgrösse und zeigt immer in die gleiche Richtung wie $\vec{E}$.

$$\vec{D}_1 = \epsilon \cdot \vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{1.5}$$

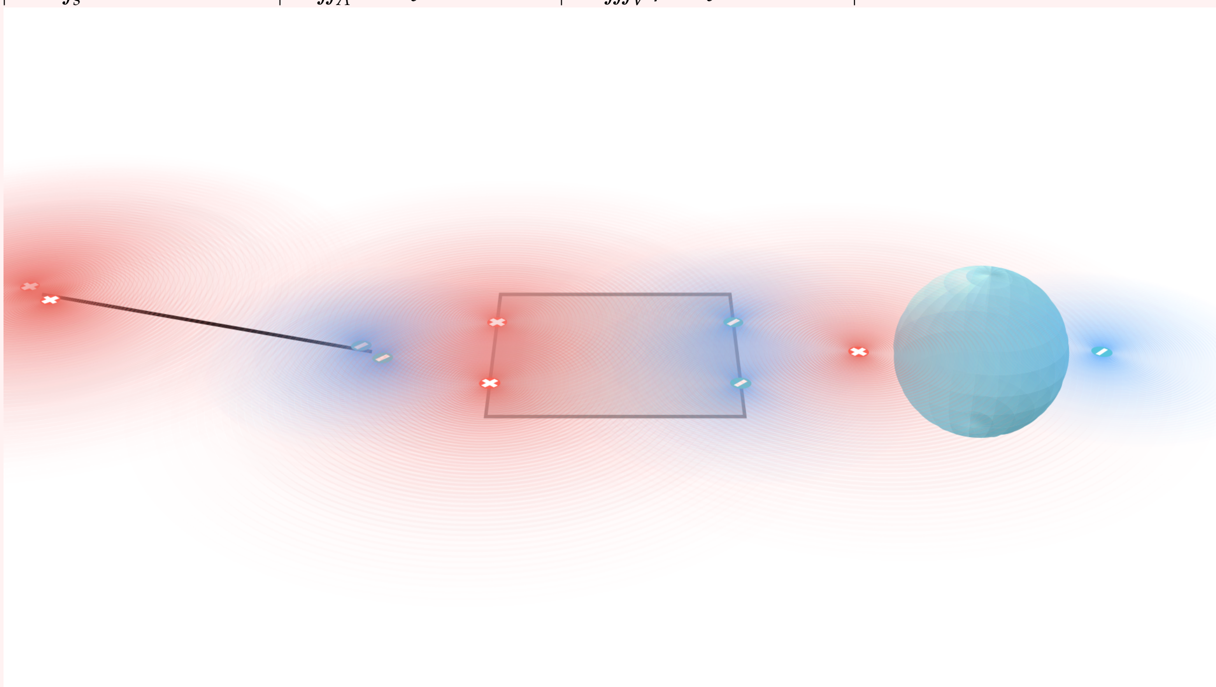


1.5 Ladungsdichten

Definition 1.5.1: Ladungsdichten

Die Ladungsdichte beschreibt die Verteilung der Ladung über eine Linie, eine Fläche oder ein Volumen. Da Ladungen positiv oder negativ sein können ist dem entsprechend die Ladungsdichte negativ oder positiv.

Längenladungsdichte	Flächenladungsdichte	Volumenladungsdichte
$\lambda(x)$	$\sigma(x,y)$	$\rho(x,y,z)$
$\int_s \lambda(x)dx = Q$	$\iint_A \sigma(x,y)dA = Q$	$\iiint_V \rho(x,y,z) = Q$



1.6 Maxwell Gleichung No. 1 (Gauss'sche Gesetz)

Definition 1.6.1: Gauss'sche Gesetz

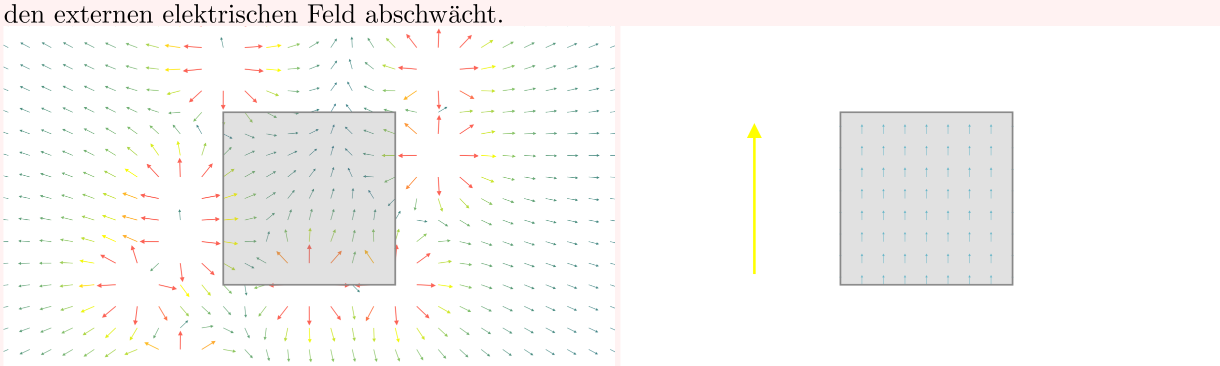
Das Gauss'sche Gesetz beschreibt den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche und kann wie folgt berechnet werden.

$$\oiint_A \vec{D} d\vec{A} = Q \tag{1.6}$$

1.7 Die dielektrische Polarisation

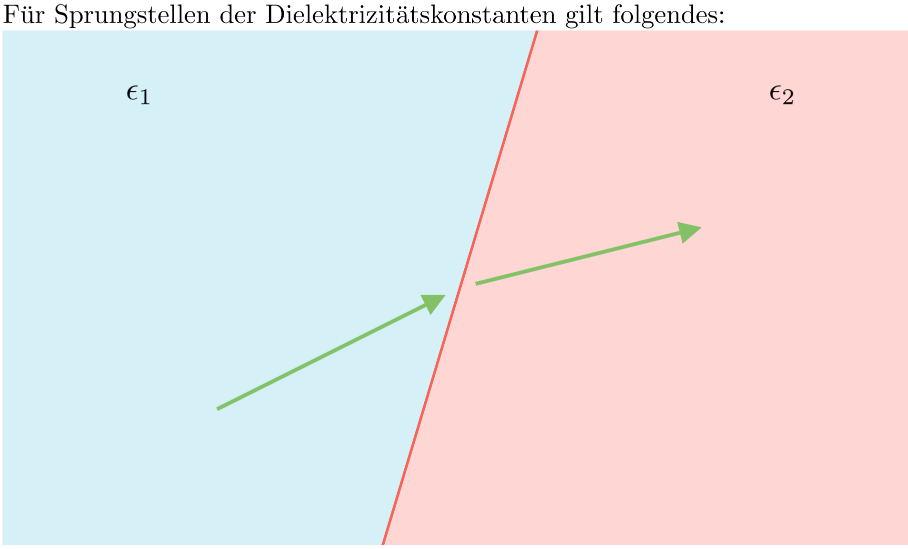
Definition 1.7.1: Dielektrika

Ein Dielektrika ist ein Stoff, welches aus Dipolen besteht. Beim Anlegen eines externen elektrischen Feldes richten sich die Dipole nach dem elektrischen Feld. Diese bilden wiederum ein elektrisches Feld, welches den externen elektrischen Feld abschwächt.



Diese Abschwächung ist je nach Material verschieden und kann anhand der Dielektrizitätszahl ϵ_r gekennzeichnet werden.

Für Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten gilt folgendes:



$$D_{n1} = D_{n2}.$$

$$\epsilon_1 \cdot E_{n1} = \epsilon_2 \cdot E_{n2} \Rightarrow \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

$$E_{t1} = E_{t2}.$$

$$\frac{D_{t1}}{D_{t1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

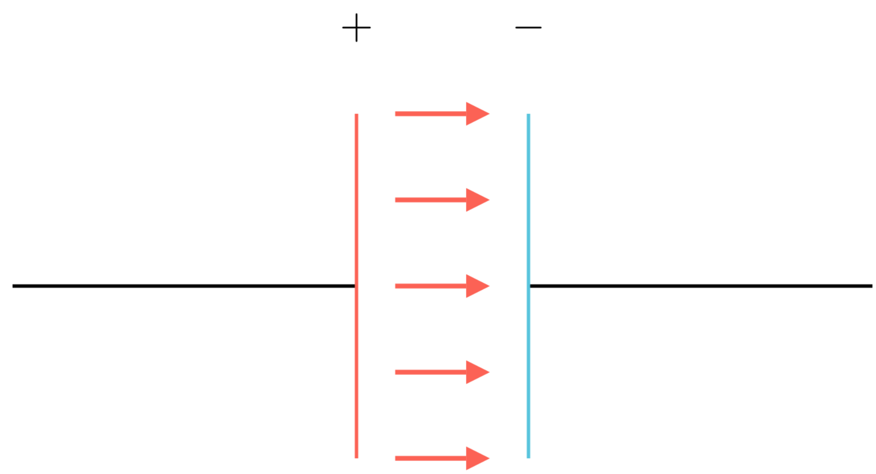
Bemerkung:-

Bei einer sprunghaften Änderung der Dielektrizitätskonstante sind die Normalkomponente der Flussdichte und die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig. [Albach, 2020] Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke sowie die Tangentialkomponente der Flussdichte kann als Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten berechnet werden.

1.8 Kondensator

Definition 1.8.1: Kondensator

Der Kondensator kann als kurzzeitiger Energiespeicher betrachtet werden. [Miller, 2024] Er besteht aus zwei entgegengesetzt geladene metallische Platten, welche ein elektrisches Feld bilden.



Jeder Kondensator hat eine Kapazität. Diese wird wie folgt definiert.

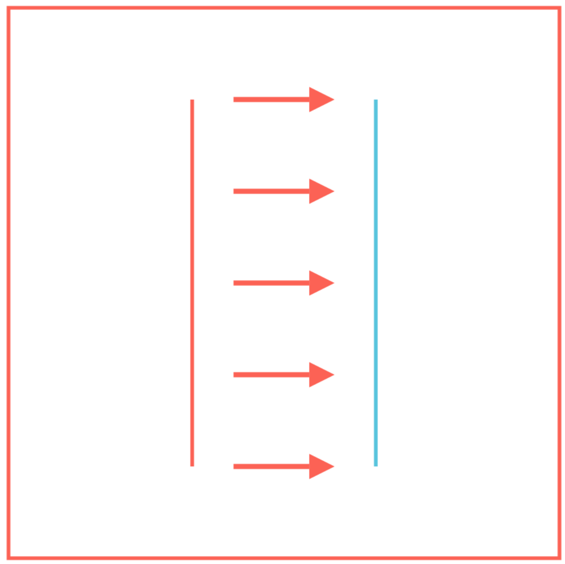
Definition 1.8.2: Kapazität

Die Kapazität ist ein Mass für die Fähigkeit eines Körpers, Ladungen zu speichern. [Albach, 2020] Sie ist das Verhältnis aus der aufgenommenen Ladung Q zu der angelegten Spannung U und wird mit C gekennzeichnet.

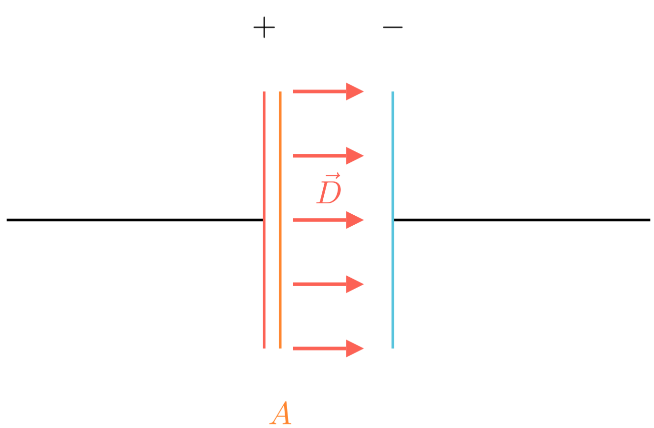
$$C = \frac{Q}{U} \tag{1.7}$$

1.8.1 Elektrische Flussdichte im Plattenkondensator

Wir nehmen immer einen idealen Kondensator an. Das heisst, dass die Felder im Kondensator homogen sind.



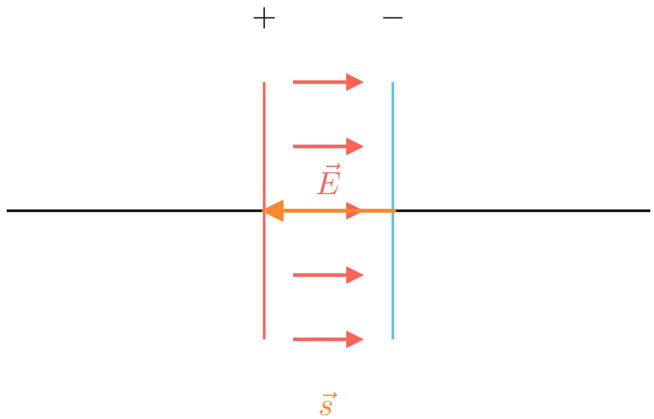
Wendet man nun das Gauss'sche Gesetz (Kapitel 1.6) an, so lässt sich die elektrische Flussdichte wie folgt herleiten.



$$Q = \oiint \vec{D} d\vec{A} = \iint D dA = D \cdot A.$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{A} \tag{1.8}$$

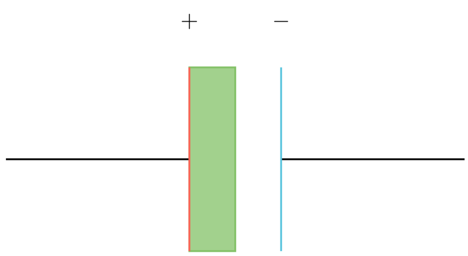
Des Weiteren gilt für die Spannung



$$U = -\int \vec{E} d\vec{s} = E \cdot d.$$
$$\Rightarrow E = \frac{U}{d} \tag{1.9}$$

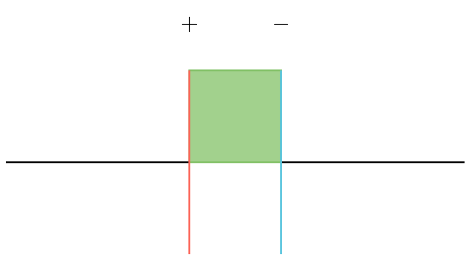
1.8.2 Plattenkondensator mit Dielektrikum

Für Plattenkondensatoren mit einem Dielektrikum zwischen den geladenen Platten unterscheiden wir zwei Fälle.



Wenn das Dielektrikum parallel zur Platte ist wird die elektrische Flussdichte nicht beeinflusst. Da für das elektrische Feld E die Distanz d nicht mehr konstant ist, gelten die folgenden Formel.

$$E = \begin{cases} \frac{D}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \text{ innerhalb des Dielektrikums} \\ \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \text{ ausserhalb des Dielektrikums} \end{cases}.$$



Wenn das Dielektrikum senkrecht zur Platte ist wird das elektrische Feld nicht beeinflusst. Da für den elektrischen Fluss D die Fläche A nicht mehr konstant ist, gelten die folgenden Formel.

$$D = \begin{cases} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot U}{d} \text{ innerhalb des Dielektrikums} \\ \epsilon_0 \cdot E = \frac{\epsilon_0 \cdot U}{d} \text{ ausserhalb des Dielektrikums} \end{cases}.$$

Die Formel der Kapazität (Gleichung 1.7) kann nun wie folgt umgeschrieben werden.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint \vec{D} d\vec{A}}{\int \vec{E} d\vec{s}} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d} \tag{1.10}$$

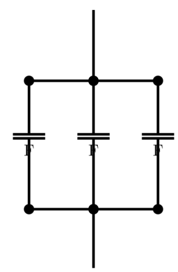
Weitere Kapazitäten zeigt die folgende Tabelle.

Kondensator	Formel
Zylinderkondensator	$\frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$
Kugelkondensator	$4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$

Für die Energie, welche der Kondensator speichern kann wird die folgende Formel verwendet.

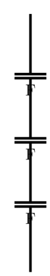
$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \tag{1.11}$$

1.8.3 Kondensator Netzwerke



Für parallel geschaltete Kondensatoren gilt:

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + ... + C_n \tag{1.12}$$



Für seriell geschaltete Kondensatoren gilt:

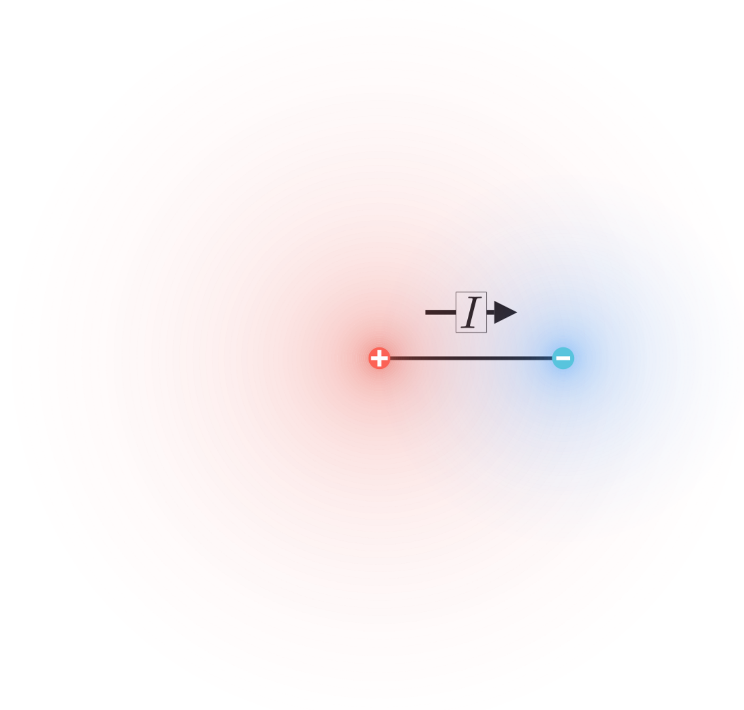
$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} \tag{1.13}$$

Kapitel 2

Das stationäre elektrische Strömungsfeld

2.1 Der elektrische Strom

Wenn zwei Elektroden mit verschiedenen Potenzialen verbunden werden, so findet ein Ladungsausgleich statt. Es entsteht ein Fluss von elektrischer Ladung, welche wir als elektrischen Strom bezeichnen.



Definition 2.1.1: Elektrischer Strom

Der elektrische Strom beschreibt die gerichtete Bewegung oder den Fluss von elektrischer Ladung. Er kann durch die Stromstärke beschrieben werden. Diese wird wie folgt berechnet.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} A \tag{2.1}$$

2.2 Die elektrische Stromdichte

Die Stromdichte ist von grosser Bedeutung. Sie beschreibt den Stromfluss über eine bestimmte Querschnittsfläche. Eine sehr hohe Stromdichte würde bedeuten, dass des Medium wodurch der Strom fliesst sich sehr stark erhitzen würde und das möchte man vermeiden.

Definition 2.2.1: Elektrische Stromdichte

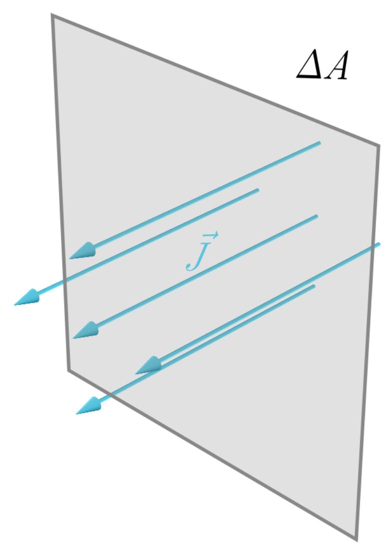
Die elektrische Stromdichte beschreibt den Stromfluss über eine bestimmte Querschnittsfläche. Sie kann durch zwei Formel bestimmt werden.

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \tag{2.2}$$

wobei κ der spezifische Leitwert ist oder

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v} \tag{2.3}$$

wobei ρ die Ladungsdichte und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Elektronen sind.



Die Stromdichte kann auch verwendet werden, um die Stromstärke zu berechnen.

$$I = \iint_A \vec{J} d\vec{A} \tag{2.4}$$

Bemerkung:-

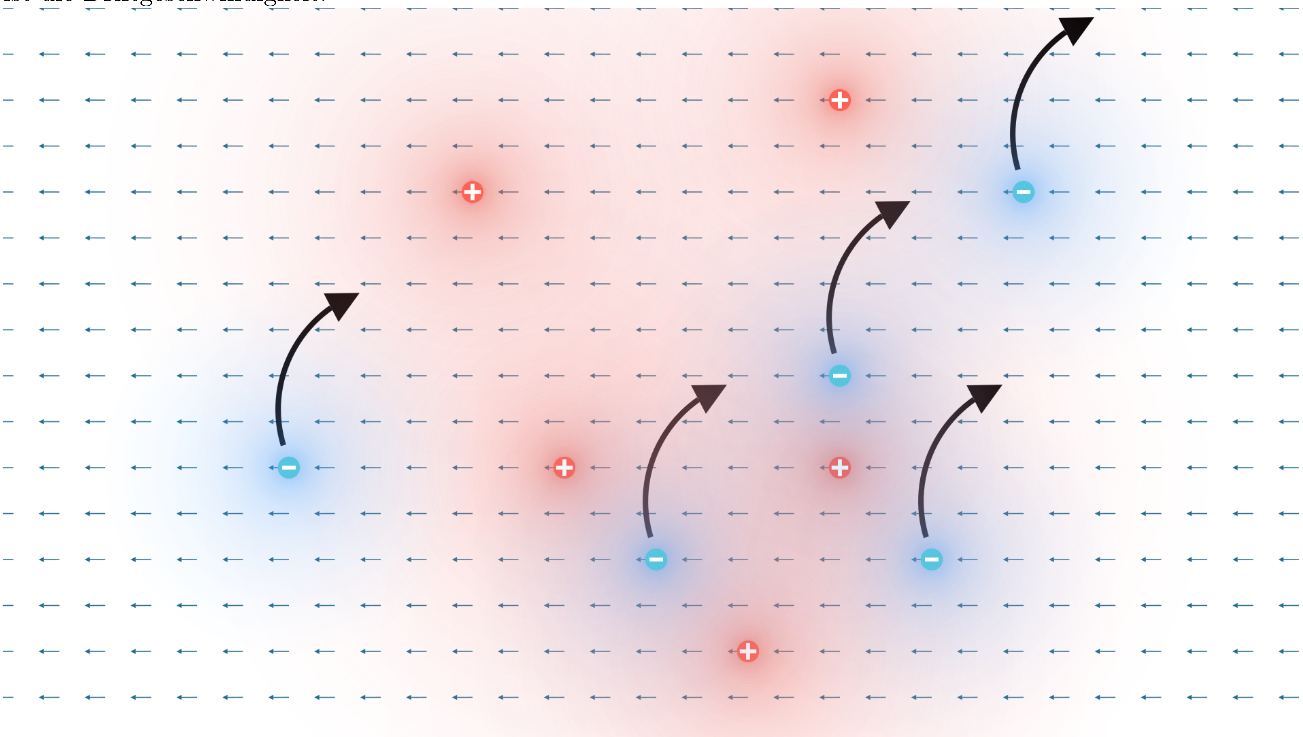
Für das stationäre Strömungsfeld wo gilt, dass die ortsabhängige Stromdichte konstant ist, hat die Stromstärke (Gleichung 2.4) eine bestimmte Eigenschaft.

$$I = \oiint_A \vec{J} d\vec{A} = 0 \tag{2.5}$$

Dies bedeutet dass der Strom, welche in die Fläche reinfliesst auch wieder rausfliessen muss.

2.3 Ladungsträgerbewegung in Leiter

Bei der Ladungsträgerbewegung spielt die Driftgeschwindigkeit eine grosse Rolle. Die Elektronen, welche sich in einem Medium befinden bewegen sich ohne Einfluss in jede Richtung. Wird jedoch ein Elektrisches Feld angebracht, so bewegen sich die Elektronen gegen das Feld. Dabei prallen sie aber gegen die Protonen, welche sich nicht bewegen können. Die Geschwindigkeit mit welche die Elektronen sich gegen das elektrische Feld bewegen ist die Driftgeschwindigkeit.



Definition 2.3.1: Driftgeschwindigkeit

Die Driftgeschwindigkeit beschreibt die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit welche Ladungsträger sich aufgrund eines externen elektrischen Feldes haben. Sie lässt sich wie folgt rechnen.

$$\vec{v}_e = -\mu_e \cdot \vec{E} \tag{2.6}$$

wobei μ_e die Materialkonstante ist.

2.4 Die spezifische Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand

Definition 2.4.1: Spezifische Leitfähigkeit

Die spezifische Leitfähigkeit ist eine Stoffeigenschaft und beschreibt, wie gut elektrischer Strom durch ein Stoff geleitet wird. Die spezifische Leitfähigkeit ist für jeden Stoff verschieden und wird mit κ bezeichnet.

Mithilfe vom elektrischen Feld $\vec{E}$ kann man die Stromdichte $\vec{J}$ mit der folgenden Gleichung berechnen.

$$\vec{J} = (-ne) \cdot \vec{v}_e = ne \cdot \mu_e \cdot \vec{E} = \kappa \cdot \vec{E} \tag{2.7}$$

In vielen Fällen wird anstelle von der spezifischen Leitfähigkeit der spezifische Widerstand verwendet.

Definition 2.4.2: Spezifische Widerstand

Der spezifische Widerstand ist eine temperaturabhängige Materialkonstante und wird zur Berechnung des elektrischen Widerstands eines Mediums verwendet. Der spezifische Widerstand ist der Kehrwert der spezifischen Leitfähigkeit κ.

$$\rho_R = \frac{1}{\kappa} \tag{2.8}$$

Da die Materialkonstante temperaturabhängig ist, verändert sich der spezifische Widerstand je nach Temperatur. Um den spezifischen Widerstand eines Stoffes bei einer bestimmten Temperatur zu bekommen, kann die folgende Formel verwendet werden.

$$\rho_{R,20°C} \cdot (1 + \alpha \Delta T) \tag{2.9}$$

wobei α der Temperaturkoeffizient ist.

Bemerkung:-

In den meisten technischen Anwendungen ist der auftretende Temperaturbereich soweit begrenzt, dass die Temperaturabhängigkeit $\rho_R(T)$ durch eine lineare Näherung hinreichend genau beschrieben werden kann. [Albach, 2020]

2.5 Widerstand (Ohm'sche Gesetz)

Definition 2.5.1: Widerstand

Unter dem elektrischen Widerstand R versteht man das Verhältnis von der angelegten Spannung U zu dem Gesamtstrom I. [Albach, 2020] Sie ist definiert wie folgt.

$$R = \frac{U}{I} \tag{2.10}$$

Der elektrische Widerstand kann verwendet werden um den Gesamtwiderstand eines Bauteils zu berechnen, da dieser nicht abhängig ist von dem spezifischen Widerstand oder den Dimensionen des Stoffes. Umgekehrt kann der elektrische Widerstand durch den spezifischen Widerstand und den Dimensionen des Stoffes berechnet werden. Dies geht durch die folgende Formel.

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} = \frac{\rho_R \cdot l}{A} \tag{2.11}$$

Wie der spezifische Widerstand ist der elektrische Widerstand auch temperaturabhängig und definiert durch die folgende Gleichung.

$$R = R_{20°C} \cdot (1 + \alpha \Delta T) \tag{2.12}$$

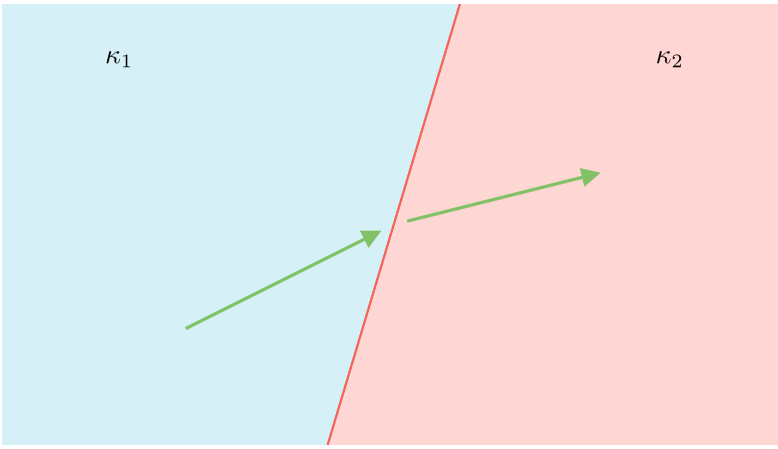
Bemerkung:-

In vielen Fällen wird die Berechnung von Schaltungen dadurch erleichtert, dass man nicht den Widerstand, sondern seinen Kehrwert verwendet.

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.13}$$

G heisst elektrischer Leitwert.

2.6 Das Verhalten der Feldgrössen an Grenzflächen



$$J_{n_1} = J_{n_2}$$

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$

$$\frac{J_{t_1}}{J_{t_2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

2.7 Energie und Leistung

Definition 2.7.1: Energie

Energie ist eine wichtige, physikalische Grösse in vielen Gebieten der Naturwissenschaften und kann in Form von Wärme, Arbeit oder Strahlung vorkommen

Wir haben gelernt, dass Elektronen durch ein externen elektrischen Feld in Bewegung gesetzt werden können. Die Energie, welche dabei aufgewendet wird um die Elektronen in Bewegung zu versetzen wird von dem elektrischen Feld entnommen.

Die aufgewendete Energie über einen bestimmten Zeitintervall kennen wir im allgemeinen als die Leistung.

Definition 2.7.2: Leistung

Die Leistung ist über ein Zeitintervall umgesetzte Energie. Sie kann mit der folgenden Formel berechnet werden.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \tag{2.14}$$

Kapitel 3

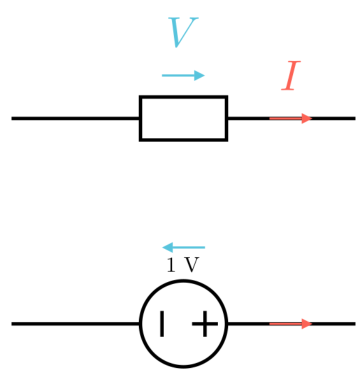
Einfache elektrische Netzwerke

3.1 Zählpfeil

Definition 3.1.1: Zählpfeil

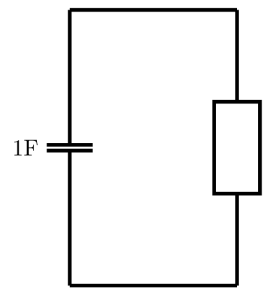
Ein Zählpfeil veranschaulicht in einem elektrischen Schaltkreis die Richtung der Spannung und des Stroms. Dabei gelten die zwei folgenden Regel:

- An Verbrauchern ist die Richtung der Spannung gleich der Richtung des Stroms.
- Bei einer Quelle ist die Richtung der Spannung umgekehrt zur Richtung des Stroms. (Generatorzählpfeilsystem)



3.2 Strom- und Spannungsquellen

Ein Kondensator, welcher parallel geschaltet ist, mit einem Widerstand kann als Spannungsquelle betrachtet werden, wobei die Energie vom Kondensator entnommen wird und als Wärme beim Widerstand abgegeben wird.



Das Problem hierbei ist, dass die Spannung mit der Zeit abnimmt und die Leistung nur begrenzt abgegeben werden kann. Deshalb führen wir die Strom- und Spannungsquelle ein.

Definition 3.2.1: Strom- und Spannungsquelle

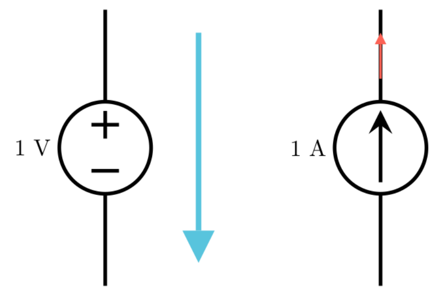
Eine Strom- bzw. eine Spannungsquelle liefert in einem elektrischen Schaltkreis einen konstanten Strom bzw. eine konstante Spannung. Dabei gilt für die Stromquelle:

- Der Ausgangsstrom der Stromquelle ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.
- Die Ausgangsspannung der Stromquelle hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab.

[Albach, 2020]
Für die Spannungsquelle gilt.

- Die Ausgangsspannung der Spannungsquelle ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk.
- Ausgangsspannung der Spannungsquelle hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab

[Albach, 2020]
Diese Regeln gelten nur für ideale Strom- und Spannungsquellen.



3.3 Die Kirchhoff'schen Gleichungen

Definition 3.3.1: Kirchhoff'schen Gleichungen

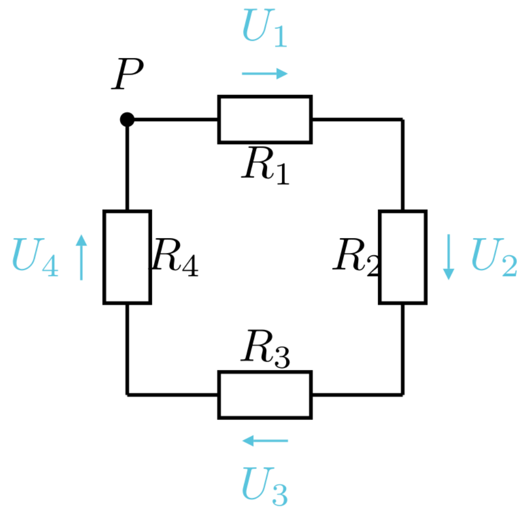
Die Kirchhoff'schen Gleichungen werden vor allem bei der Schaltungstechnik und Netzwerkanalyse verwendet. Dabei spielen zwei Regeln eine sehr wichtige Rolle.

- Maschenregel
- Knotenregel

3.3.1 Maschen- und Knotenregel

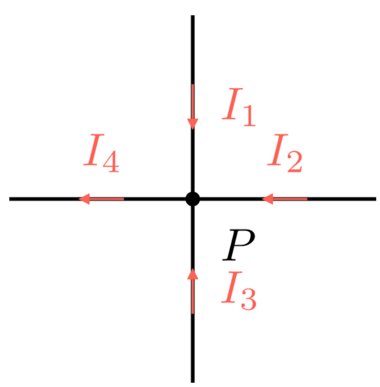
Die Maschenregel wird für die Berechnung der Spannung in einer Masche eines komplexen elektrischen Netzwerks verwendet. Dabei gilt

$$\sum_{k=0}^{n} U_k = 0 \tag{3.1}$$



Die Knotenregel, im Vergleich zur Maschenregel wird zur Berechnung des Stroms eines komplexen elektrischen Netzwerks verwendet. Dabei gilt

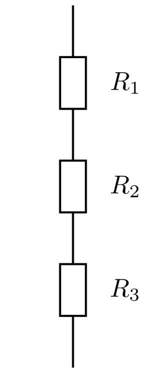
$$\sum_{k=0}^{n} I_k = 0 \tag{3.2}$$



3.4 Einfache Widerstandsnetzwerke

Es gibt 2 verschiedene Arten von Widerstandsnetzwerke und jede davon hat verschiedene Eigenschaften.

Definition 3.4.1: Reihengeschaltene Widerstände

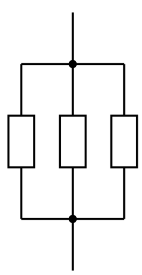


$$R_{\text{Ges}} = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.3}$$

$$I_{\text{Ges}} = I_{R_1} = I_{R_2} = I_{R_i} \tag{3.4}$$

$$U_i = U_{\text{Ges}} \cdot \frac{R_i}{R_{\text{Ges}}} \tag{3.5}$$

Definition 3.4.2: Parallelgeschaltene Widerstände



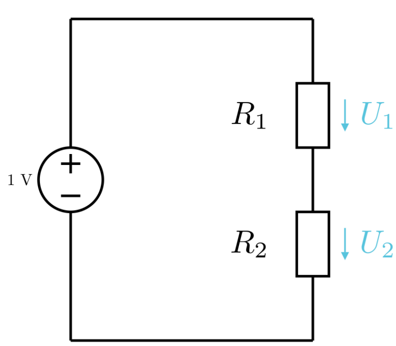
$$\frac{1}{R_{\text{Ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{3.6}$$

$$U_{\text{Ges}} = U_{R_1} = U_{R_2} = U_{R_i} \tag{3.7}$$

$$I_i = I_{\text{Ges}} \cdot \frac{R_{\text{Ges}}}{R_i} \tag{3.8}$$

3.4.1 Spannungsteiler

Anhand Gleichung 3.5 erkennt man, dass die Spannung sich bei reihengeschaltene Widerstände sich teilt. Aus dieser Eigenschaft kann man einen Spannungsteiler kreieren.



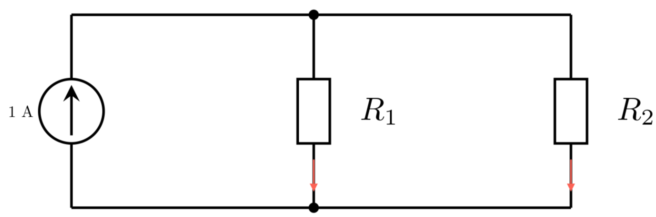
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{3.9}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.10}$$

Die Gleichungen gelten nur wenn der gleiche Strom durch alle Widerstände fliesst.

3.4.2 Stromteiler

Mit Parallelgeschaltene Widerstände kann man ein Stromteiler kreieren. Dies erkennt man anhand der Gleichung 3.8.



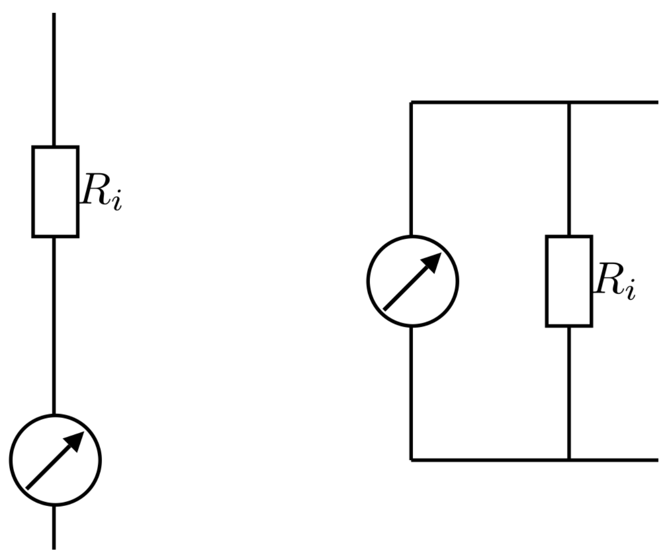
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{3.11}$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{3.12}$$

Mit diesen Eigenschaften können auch Ströme und Spannungen gemessen werden.

Bemerkung:-

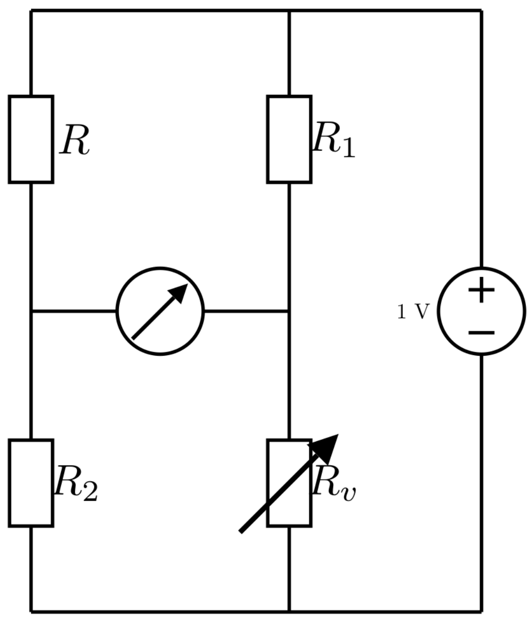
Ampèremeter und Voltmeter haben einen Innenwiderstand aufgrund der Bauteile und haben dadurch einen Messfehler. Dieser muss natürlich berücksichtigt werden.



3.4.3 Wheatstone Brücke

Definition 3.4.3: Wheatstone Brücke

Die Wheatstone Brücke ist eine Messeinrichtung zur Messung von elektrischen Widerständen und Widerstandsänderungen.



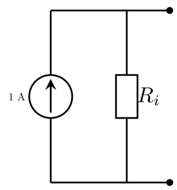
Um den Widerstand zu bestimmen verändert man den variablen Widerstand, bis der Voltmeter eine Spannung von 0V anzeigt. Mit der Gleichung lässt sich denn der Widerstand messen.

3.5 Reale Strom- und Spannungsquellen

In Kapitel 3.2 haben wir uns ideale Strom- und Spannungsquellen angeschaut. Im Vergleich zu den idealen Strom- und Spannungsquellen haben reale einen Innenwiderstand aufgrund von den Strom- und Spannungsabfällen in den Quellen selbst. Dies macht das analysieren von elektrischen Netzwerken wesentlich schwieriger.

Definition 3.5.1: Reale Strom- und Spannungsquellen

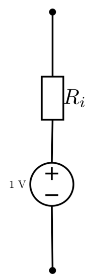
Reale Strom- und Spannungsquellen sind elektrische Energiequellen wobei die Verluste mit einberechnet werden durch Innenwiderstände.



U_0 ist die Lehrlaufspannung und kann durch die folgende Formel berechnet werden.

$$U_0 = I_0 \cdot R_i \tag{3.13}$$

Wenn kein Verbraucher an der Stromquelle angeschlossen wird, so fliesst der ganze Strom I_0 über den Innenwiderstand und die Energie wird als Wärme an den Innenwiderstand abgegeben. Somit gilt $I_0 = I_K$



$U = U_L = U_0$ ist die Lehrlaufspannung. Diese wird gemessen wenn kein Verbraucher an der Spannungsquelle verbunden ist.
Wenn die Spannungsquelle kurzgeschlossen wird, so fliesst ein Kurzschlussstrom I_K.

$$I_K = \frac{U}{R_i} \tag{3.14}$$

Die Energie wird als Wärme an den Innenwiderstand abgegeben.

Bemerkung:-

Da ein Kurzschluss vermeidet werden soll gilt

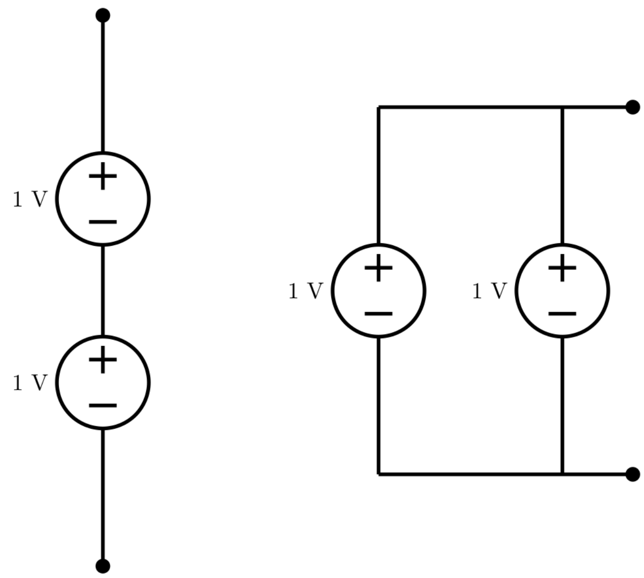
- Eine Stromquelle soll nicht ohne Verbraucher betrieben werden.
- Eine Spannungsquelle soll nicht ohne Verbraucher kurzgeschlossen und betrieben werden.

Natürlich ist das nicht realistisch, da in Realität Strom und Spannungsquellen Sicherheitsmechanismen haben um Schäden zu vermeiden.

3.6 Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher

Im folgenden Kapitel werden elektrische Netzwerke mit verschiedenen Konfigurationen (hauptsächlich reale Quellen und Verbraucher) angeschaut.

3.6.1 Zusammenschaltung von Spannungsquellen



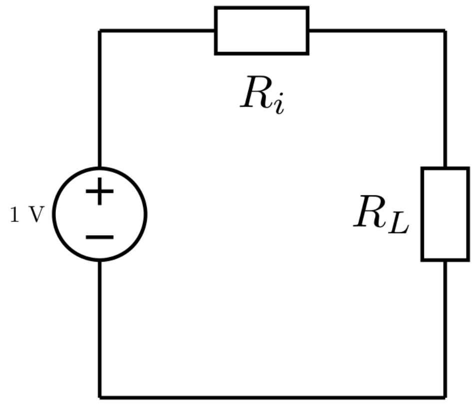
Spannungsquellen können in Serie oder Parallel geschaltet werden. Je nach dem haben sie eine andere Wirkung.

- Spannungsquellen in Serie erhöhen die Gesamtspannung
- Parallel geschaltete Spannungsquellen erhöhen den Strom oder die Kapazität

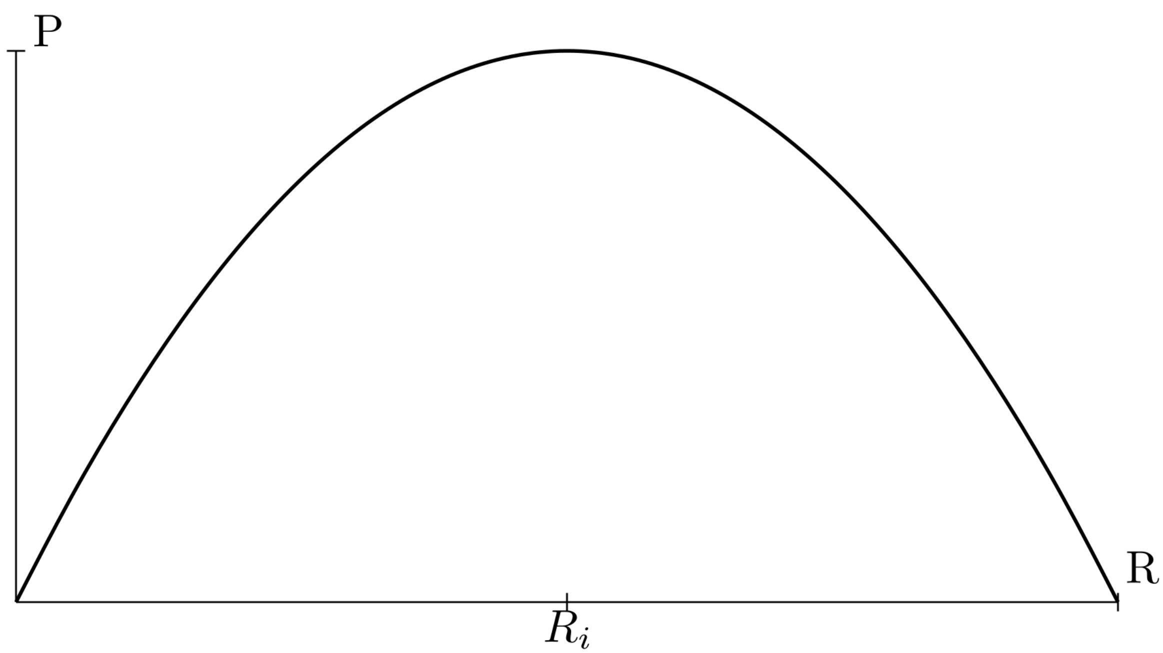
Jedoch hat das parallelschalten von Spannungsquellen ihre Tücken. Einerseits kann die Leistungsabgabe der Spannungsquellen unterschiedlich sein, wenn die Spannungsquellen unterschiedlich sind. Andererseits kann eine Quelle auch als Verbraucher wirken. Dies kann aber eine willkommende Wirkung sein z.B. bei einer Batterie.

3.6.2 Leistungsanpassung

Man betrachte das folgende elektrische Netzwerk.



Ziel ist es R_L zu bestimmen, so dass die Leistung über R_L am grössten ist. Wie kann man nun R_L bestimmen? Wie ersparen uns die Rechnerei. (Siehe [Albach, 2020] S. 144) Aber damit eine Spannungsquelle die maximale Leistung ausgibt, muss $R_L = R_i$ sein. Ist R_L zu gross, so fliesst kein Strom durch R_L. Ist R_L zu klein, so haben wir einen Kurzschluss. Daraus entsteht der folgende Graf.



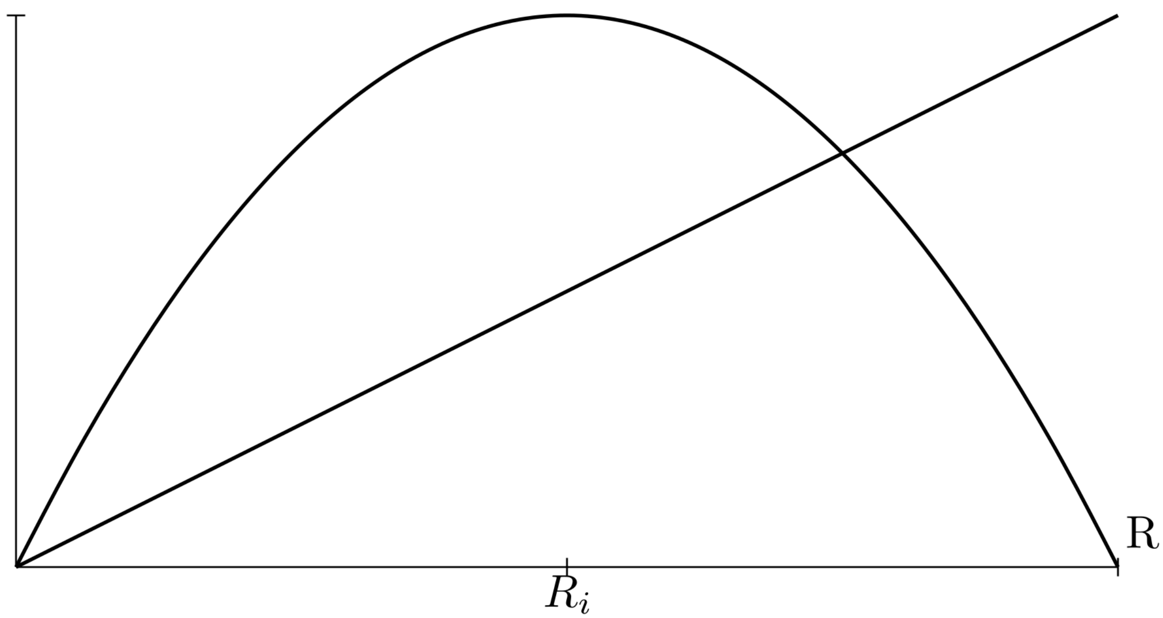
In den meisten Fällen ist R_L grösser als R_i da sonst die Hälfte der Leistung über R_i abgegeben wird und R_i in den meisten Fällen nicht dafür gebaut ist. Ausserdem besteht keine Gefahr für einen Kurzschluss.

3.6.3 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad hat eine hohe Relevanz in elektrischen Netzwerken. Sie gibt an, wie viel von der zugeführten Energie als Nutzenergie verwendet wird. Diese wird wie folgt berechnet.

$$\eta = \frac{P_L}{P_{\text{ges}}} \tag{3.15}$$

Wenn wir das elektrische Netzwerk in Kapitel 3.6.2 anschauen so sehen wir, dass wenn R_L zu klein ist die ganze Leistung in Hitze umgewandelt wird (Kurzschluss) und der Wirkungsgrad 0 ist. Wenn R_L am grössten ist entstehen keine Energieverluste. Jedoch kann kein Strom mehr fliessen was auch nicht ideal ist. Deshalb wählt man ein R_L welches den grössten Wirkungsgrad hat und die beste Leistungsanpassung.



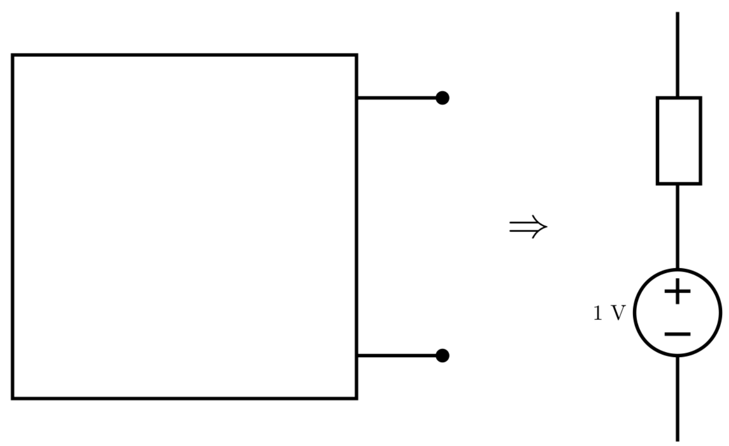
3.7 Netzwerkumwandlungen

Zur Umwandlung von Netzwerken verwenden wir den Satz von Thevenin, den Satz von Norton und die Stern-Dreieck-Umwandlung.

3.7.1 Satz von Thevenin und Satz von Norton

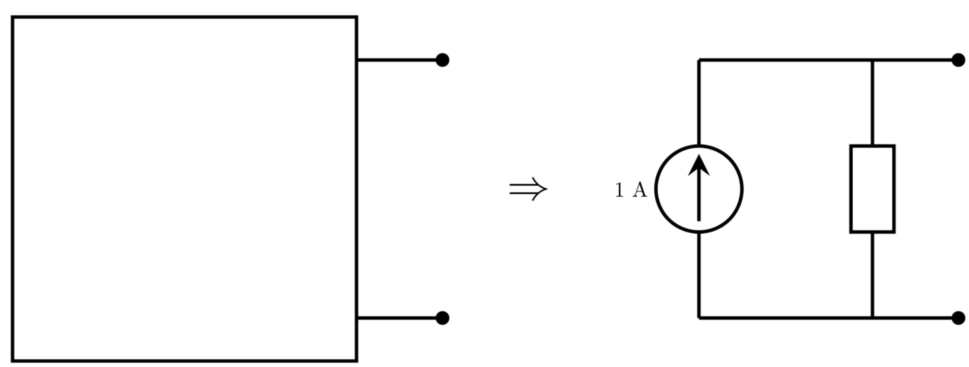
Definition 3.7.1: Satz von Thevenin

Der Satz von Thevenin besagt, dass jede Anordnung von Widerständen und Quellen in eine reale Spannungsquelle umgewandelt werden kann.



Definition 3.7.2: Satz von Norton

Der Satz von Norton besagt, dass jede Anordnung von Widerständen und Quellen in eine reale Stromquelle umgewandelt werden kann.



Die Bestimmung der Spannungs- bzw. die Stromquelle benötigt nur die Quellspannung bzw. den Quellstrom, sowie der Innenwiderstand.

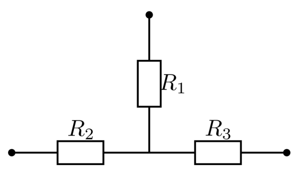
Bemerkung:-

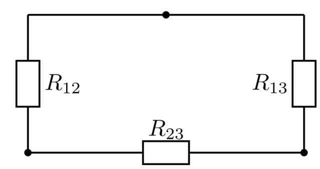
Die Bestimmung vom Innenwiderstand geht mit drei Methoden:

- Den Widerstand des elektrischen Netzwerks messen im Leerlauf
- Thevenin: Kurzschlussstrom berechnen und damit den Innenwiderstand berechnen.
- Norton: Leerlaufspannung berechnen und damit den Innenwiderstand berechnen.

3.7.2 Stern-Dreieck-Umwandlung

Die folgenden zwei elektrische Netzwerke sind identisch.





Für die Berechnung von den jeweiligen Widerständen können die folgenden Formeln von Nutzen sein.

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{3.16}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{3.17}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{3.18}$$

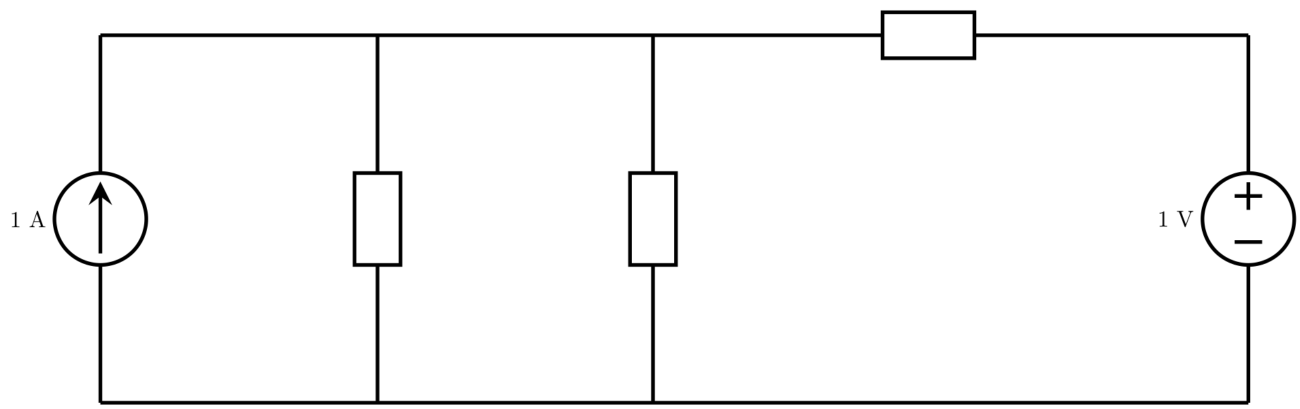
$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3} \tag{3.19}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1} \tag{3.20}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2} \tag{3.21}$$

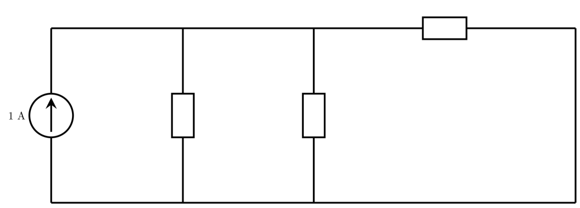
3.8 Das Überlagerungsprinzip

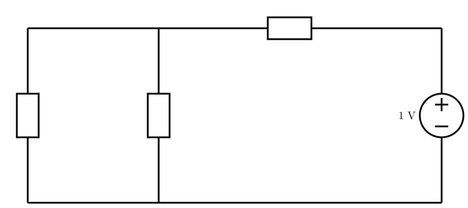
Wir lernen nun ein Werkzeug kennen, welches für die elektrische Netzwerkanalyse mit mehreren Quellen eine signifikante Rolle spielt. Nehmen wir an, dass das folgende elektrische Netzwerk gegeben ist.



Wir gehen nun die Schritte durch um eine Netzwerkanalyse zu machen.

1. Wir teilen das elektrische Netzwerk auf. Im jeden aufgeteilten elektrischen Netzwerk ist jeweils nur eine Quelle enthalten. Dabei gehen wir wie folgt vor:
   - Spannungsquellen werden mit einem Kurzschluss ersetzt
   - Stromquellen werden durch ein Leerlauf ersetzt





2. Wir berechnen in allen Teilnetzwerken Ströme und Spannungen.
3. Wir addieren alle Lösungen zusammen.

Bemerkung:-

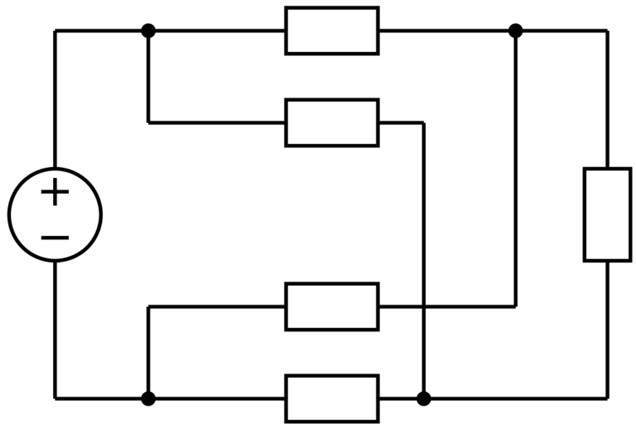
Das Überlagerungsprinzip funktioniert nur für den Strom und die Spannung. Die Leistung kann nicht mit dieser Methode berechnet werden da die Leistung keine lineare Beziehung zum Strom hat.

Bemerkung:-

Beachte beim Überlagerungsprinzip die Richtung vom Strom und von der Spannung!

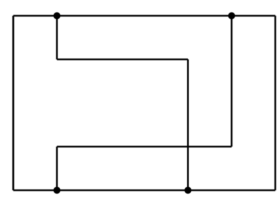
3.9 Analyse umfangreicher Netzwerke

Wir nehmen an, dass das folgende Netzwerk gegeben ist.

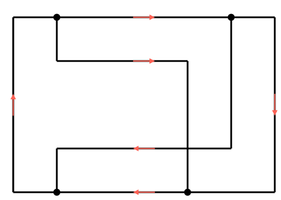


Um dieses Netzwerk zu analysieren verwendet man ein System, welches ein Gleichungssystem aufstellt um alle Grössen berechnen zu können. In unserem Fall benötigen wir mindestens 6 Gleichungen, da wir 6 Zweige haben.

1. Zeichne den Netzwerkgraphen. (Zeichne das elektrische Netzwerk ohne jegliche Komponente)

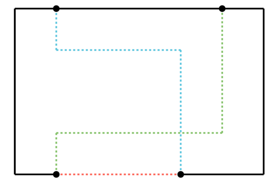


2. Definiere in jedem Zweig die Strom Richtung. Die Richtung kann willkürlich gewählt werden, da die Richtung durch ein Vorzeichen nach dem Auflösen vom Gleichungssystem korrigiert wird.

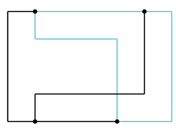


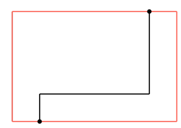
3. Stelle die Knotengleichungen auf. Eine Knotengleichung kann ignoriert werden da sie linear abhängig ist zu einer der vorherigen Knotengleichungen.
4. Stelle die Maschengleichung auf. Auch hier ist es wichtig, dass alle Maschengleichungen linear unabhängig sind. Für die Maschengleichung gibt es 2 Methoden.

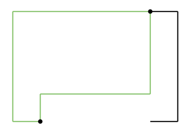
- Bei der Methode vom vollständigen Baum werden die Knoten mit n Zweigen verbunden. (n ist die Anzahl der Knoten) Danach werden die fehlenden Zweige eingesetzt um die Maschen zu bilden.



- Bei der Methode von der Auftrennung der Maschen wird aus dem Netzwerkgraph eine Masche gebildet und aus der Masche ein Zweig entfernt. Dieser Prozess wird so oft wiederholt, bis keine Maschen mehr gebildet werden können.







5. Fasse die Gleichungen in einer Matrix zusammen.

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot I_0 + 1 \cdot I_2 + -1 \cdot I_1 &= 0 \\ 1 \cdot I_1 + -1 \cdot I_3 + -1 \cdot I_4 &= 0 \\ 1 \cdot I_3 + 1 \cdot I_5 + -1 \cdot I_2 &= 0 \\ R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 &= 0 \\ R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 &= U_0 \\ -R_2 \cdot I_2 + -R_5 \cdot I_5 &= U_0 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & -R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 \\ U_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kapitel 4

Stromleitungsmechanismen

4.1 Stromleitung im Vakuum

Wir wissen, dass Ladungen durch externe elektrische Felder in eine Richtung bewegt werden können. (Kapitel 2.3) Dies bedeutet, dass Ladungen in elektrischen Feldern eine Beschleunigung erfährt. Mit dem Gesetz von Newton kann eine Formel für die Beschleunigung hergeleitet werden.

$$\vec{a} = -\frac{e \cdot U}{m_e \cdot d} \cdot \vec{e_y} \tag{4.1}$$

Die Gleichung 4.1 kann nun nach der Zeit abgeleitet werden um die Geschwindigkeit, sowie die Strecke berechnen zu können in Abhängigkeit zur Zeit.

Beschleunigung	Geschwindigkeit	Position	Kinetische Energie
$a(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$	$v(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t$	$v(t) = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot \frac{t^2}{2}$	$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot U$

Falls die Position y gegeben ist, kann durch die folgende Formel die Geschwindigkeit an dieser Position berechnet werden.

$$v(y) = \sqrt{2 \cdot U \cdot \frac{e}{m_0} \cdot \frac{y}{d}} \tag{4.2}$$

4.1.1 Relativitätstheorie

In Vakuum können Ladungen sehr hohe Geschwindigkeiten erreichen. Aus diesem Grund muss gegebenenfalls die relativistische Massenzunahme berücksichtigt werden.

$$m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \tag{4.3}$$

Bemerkung:-

Die Gleichung 4.3 wird in diesem Semester nie gebraucht.

4.1.2 Raumladungsgesetz

Definition 4.1.1: Raumladungsgesetz

Das Raumladungsgesetz beschreibt den nichtlinearen Zusammenhang von Strom und Spannung in einer evakuierten Anordnung mit zwei Elektroden. (z.B. eine Vakuumröhre). Sie wird beschrieben durch die Gleichung

$$I = \frac{4}{9} \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e}{m_0}} \cdot U^{\frac{3}{2}} \tag{4.4}$$

Was sagt die Gleichung 4.4 aus? Wenn eine Vakuumröhre bestehend aus zwei Elektroden unter Spannung liegt, so bewegen sich Ladungen von der Kathode zur Anode. An der Anode bildet sich eine Elektronenwolke aufgrund vom Elektronenüberschuss. Die Elektronenwolke beeinträchtigt den Fluss der Ladungen zur Anode. Dies beeinträchtigt auch den Strom. Die Gleichung 4.4 beschreibt den Sättigungsstrom, also den maximalen Strom welcher durch diese Anordnung fliessen kann.

4.2 Stromleitung in Gasen

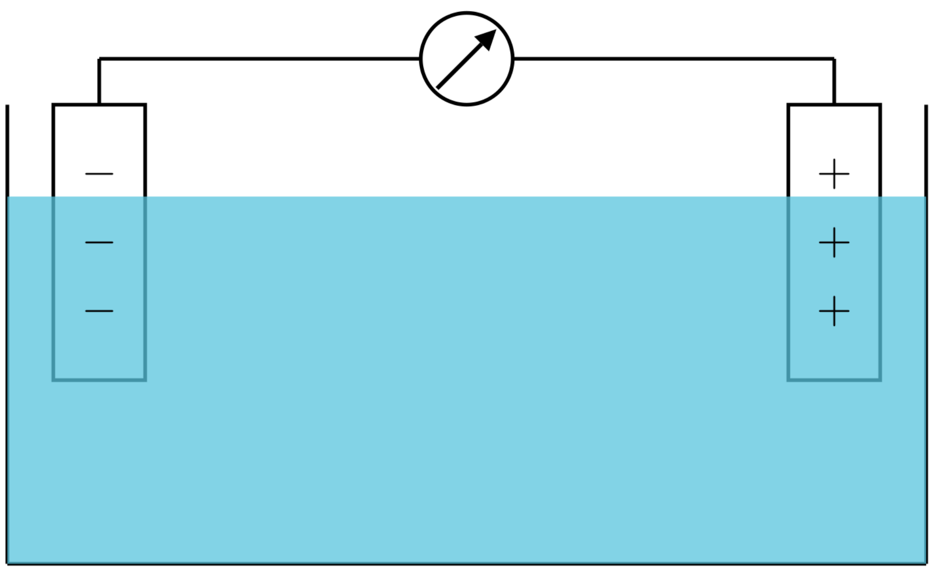
Die Bewegung von Ladungen in Gasen ist sehr stark beeinträchtigt. Dennoch haben Stromleitungen in Gasen einen besonderen Stromleitungsmechanismus.
Gasen bestehen aus Molekülen, welche neutral geladen sind. Wenn die Moleküle ionisiert werden (d.h. sie werden zu Kationen wenn sie ein Elektron verlieren oder zu Anionen wenn sie ein Elektron aufnehmen) so tragen sie zum Stromfluss bei. Jedoch ist die Zunahme vom Stromfluss sehr gering, da die Moleküle eine viel grössere Masse haben als die Ladungen.

Bemerkung:-

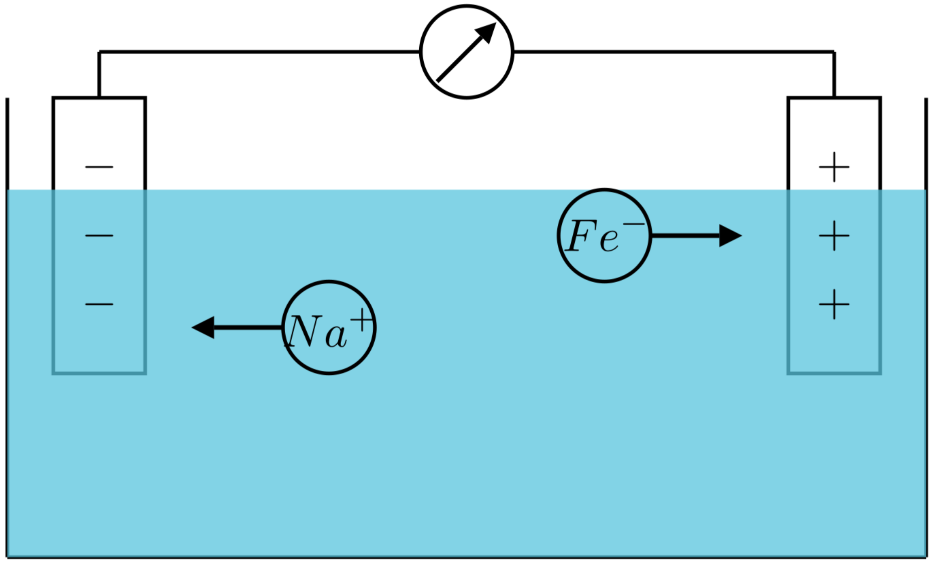
Bei der Ionisierung von Gasen unterscheidet man zwischen einer selbstständigen Leitung und einer unselbstständigen Leitung. Bei einer selbstständigen Leitung werden die Moleküle durch die vorhandene kinetische Energie von Ionen ionisiert. Bei einer unselbstständigen Leitung werden die Moleküle durch äusserlichen Einwirkungen ionisiert.

4.3 Stromleitung in Flüssigkeiten

Wir haben in Kapitel 4.2 gelernt, dass Moleküle zum Stromfluss beitragen können. Dies gilt auch für Flüssigkeiten. Wenn zwei Elektroden in destillierten Wasser eingetaucht werden, so fliesst ein sehr geringer Strom, da es nicht genügend Ionen hat, so dass eine Ladungsübertragung stattfindet.



Sobald das Wasser verunreinigt wird so steigt der Stromfluss. Dies wird sehr deutlich wenn Salz zum Wasser beigefügt wird. Das Salz trennt sich im destillierten Wasser zu Natrium-Kationen (positive geladene Ionen) und Chlor-Anion (negative geladene Ionen). Die Kationen wandern zur Kathode während die Anionen zur Anode sich bewegen. Dort angekommen geben bzw. nehmen sie Elektronen auf. Dadurch fliesst ein Strom.



Dieser Prozess wird Elektrolyse genannt und wird sehr häufig fürs Galvanisieren verwendet.

Definition 4.3.1: Galvanisieren

Unter Galvanisieren versteht man das elektrochemische Verfahren, bei dem die Elektrolyse eine dünne Metallschicht auf ein Material aufgebracht wird.

Die Masse der Metallschicht, welche beim Galvanisieren entsteht kann durch die Farraday'sche Gesetze bestimmt werden. Die bilden zusammen die folgende Gleichung.

$$m = \frac{A_r \cdot u}{z \cdot e} \cdot Q = \frac{A_r \cdot u}{z \cdot e} \cdot I \cdot t \tag{4.5}$$

Des weiteren gilt, dass das Verhältnis von $m \cdot z$ und A_r konstant ist.

$$\frac{m \cdot z}{A_r} = \text{konstant} \tag{4.6}$$

Der Strom welcher bei der Elektrolyse entsteht ist der Gesamtstrom, welcher von den negativen und positiven Ladungen induziert wird. Dadurch lässt sich die folgende Gleichung ableiten.

$$I_+ = \eta \cdot z \cdot e \cdot v_+ \cdot A \tag{4.7}$$

$$I_- = \eta \cdot z \cdot e \cdot v_- \cdot A \tag{4.8}$$

$$I = \eta \cdot z \cdot e \cdot A \cdot (|v_+| + |v_-|) \tag{4.9}$$

Aus der Gleichung 4.9 lässt sich der Widerstand berechnen.

$$R = \frac{l}{\eta \cdot z \cdot e \cdot A \cdot (\mu_+ + \mu_-)} \tag{4.10}$$

4.4 Ladungstransport in Halbleitern

Definition 4.4.1: Halbleiter

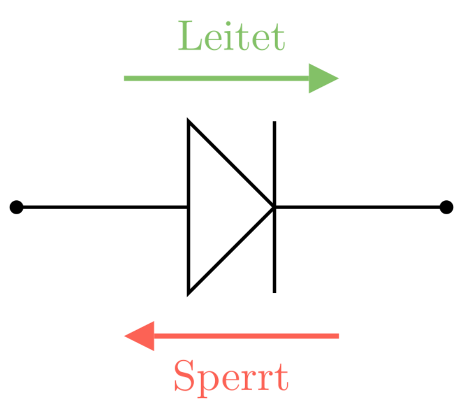
Halbleiter sind Stoffe, deren elektrische Leitfähigkeit zwischen Leitern und Isolatoren liegen. Dies bedeutet, dass sie als Leiter, sowie Isolatoren fungieren können.

Die Eigenschaft, dass Halbleiter als Leiter und Isolatoren fungieren können liegt am molekularen Aufbau von Halbleitern. Halbleiter bestehen aus frei beweglichen Elektronen und Löchern. Löcher sind freie Plätze im Kristallgitter, welche von Elektronen besetzt werden können.
Halbleiter welche einen Überschuss an Elektronen hat bezeichnet man als n-dotiert während Halbleiter mit einen Überschuss an Löchern p-dotiert nennt. Wird ein n-dotiereter Halbleiter mit einem p-dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht, so Bewegen sich die Elektronen zu den Löchern und es entstehen Löcher beim n-dotierten Halbleiter. Dadurch entsteht eine Raumladungszone welche verhindert, dass ein weiterer Austausch von Elektronen und Löchern verhindert und ein elektrisches Feld bildet. Die Raumladung bildet auch eine Sperrschicht, welche als Isolator fungiert und den Stromfluss verhindert. Diese Eigenschaft von Halbleitern ist essentiell für Dioden.

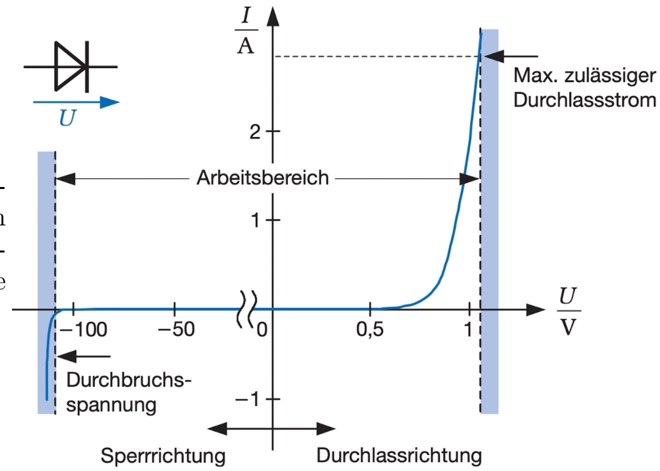
4.4.1 Dioden

Definition 4.4.2: Diode

Eine Diode ist ein elektrisches Bauteil welches in der Lage ist den Stromfluss in eine Richtung zu sperren aber in die andere Richtung fliessen zu lassen.



Für die Analyse der Diode ist Diodenkennlinie von grosser Bedeutung. Neben der maximalen Durchlassstrom zeigt die Diodenkennlinie auch die Durchbruchsspannung. Überschreitet man den Durchlassstrom bzw. die Durchbruchsspannung, so geht die Diode kaputt.



[Albach, 2020]

Bemerkung:-

Die Durchbruchsspannung wird im gegensatz zu normalen Dioden bei Zenner Dioden verwendet. Diese werden vor allem bei der Spannungsstabilisierung verwendet sowie zum Schutz von Überspannung.

Bemerkung:-

Die Diodenkennlinie ist durch die folgenden Gleichungen definiert.

$$I = \frac{U_R}{R} \tag{4.11}$$

$$U_R = U_0 - U_D \tag{4.12}$$

$$I = \frac{U_0 - U_D}{R} \tag{4.13}$$

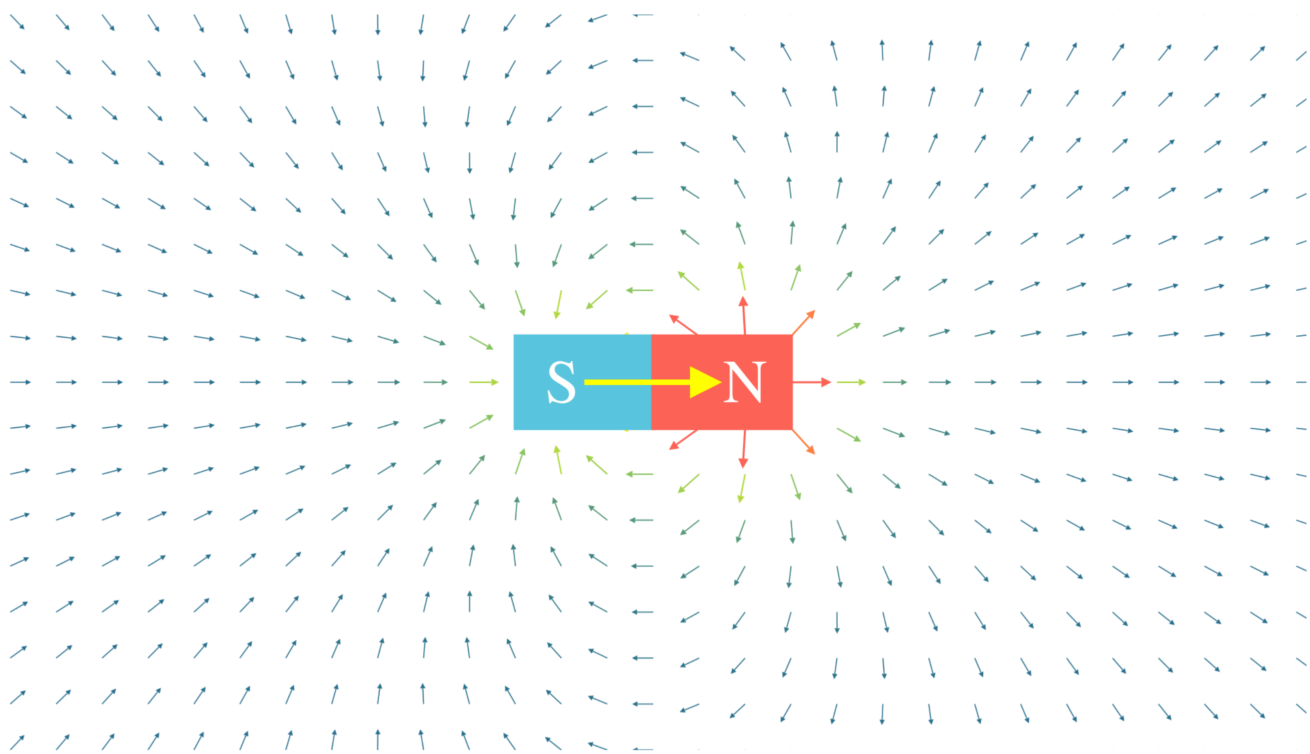
Kapitel 5

Das stationäre Magnetfeld

5.1 Magnete

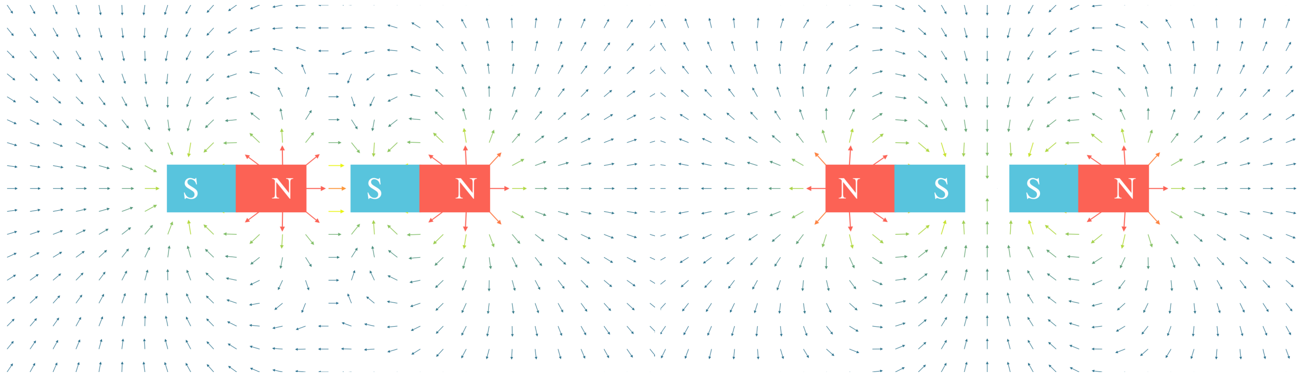
Definition 5.1.1: Magnete

Magnete sind einfachtshalber bekannt als Stäbe aus Metall mit einem Nord- und einem Südpol.



Anhand der Grafik kann man sehen, dass Magnete Kräfte auaüben. Man sieht, dass magnetische Feldlinien geschlossen sind und das Feld zeigt ausserhald des Magneten vom Nord- zum Südpol. [Miller, 2024] Innerhalb des Magneten verlaufen die magnetische Feldlinien vom Süd- zum Nordpol.

Durch Versuche mit zwei Stabmegneten hat man festgestellt, dass Magnete abstossende oder anziehende Kräfte haben, je nachdem welche Enden sich gegenüberstehen. Dies ist auch in der folgenden zwei Grafiken zu erkennen.



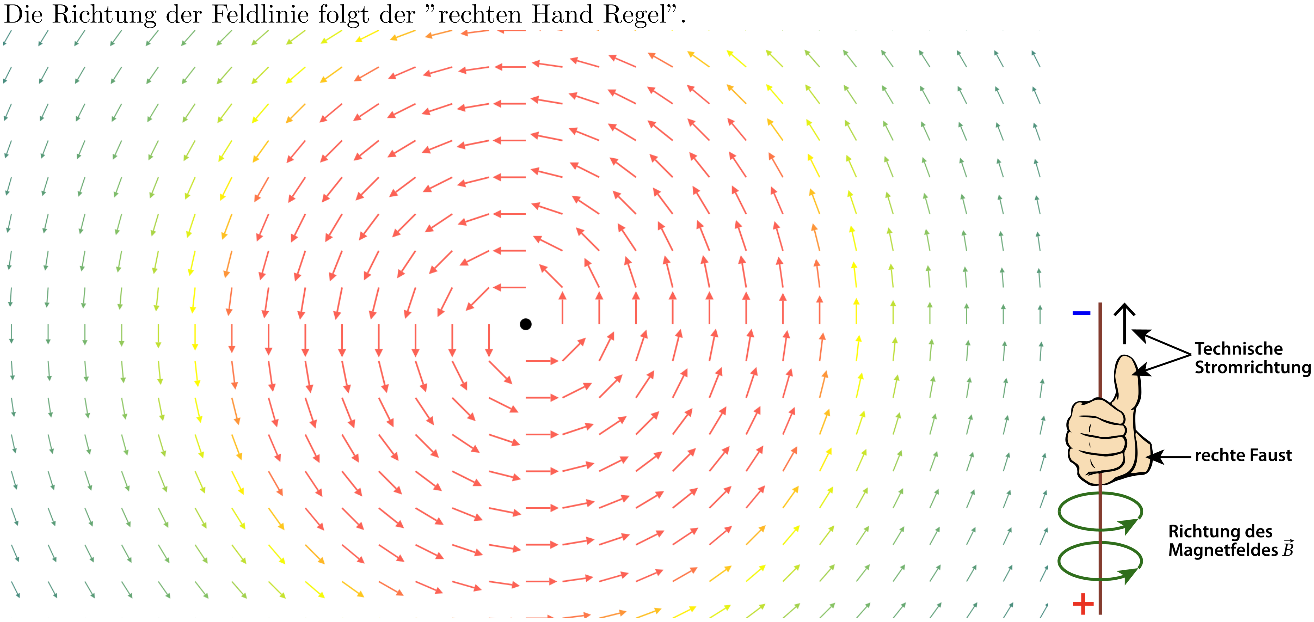
Bemerkung:-

Ungleichnamige Pole ziehen sich an. Gleichnahmige Pole stossen sich ab. [Albach, 2020]

Ein zerteilter Magnet besitzt wiederum ein jedem Teilstück ein Nord- und ein Südpol. Es gibt keine magnetische Einzelladung! [Miller, 2024]

5.2 Stromdurchflossene Leiter

Es ist bekannt, dass stromdurchflossene Leiter in ihrer Umgebung ein Magnetfeld besitzen. Bei einem geraden stromdurchflossenen Draht sind die Feldlinien konzentrische Kreise mit dem Leiter as Mittelpunkt. [Albach, 2020] Die Richtung der Feldlinie folgt der "rechten Hand Regel".



Der Betrag des Magnetfeldes nimmt mit zunehmendem Abstand vom Leiter ab. Der ist durch

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I}{\rho} \cdot \vec{e_\varphi} \tag{5.1}$$

gegeben.

5.3 Lorenzkraft

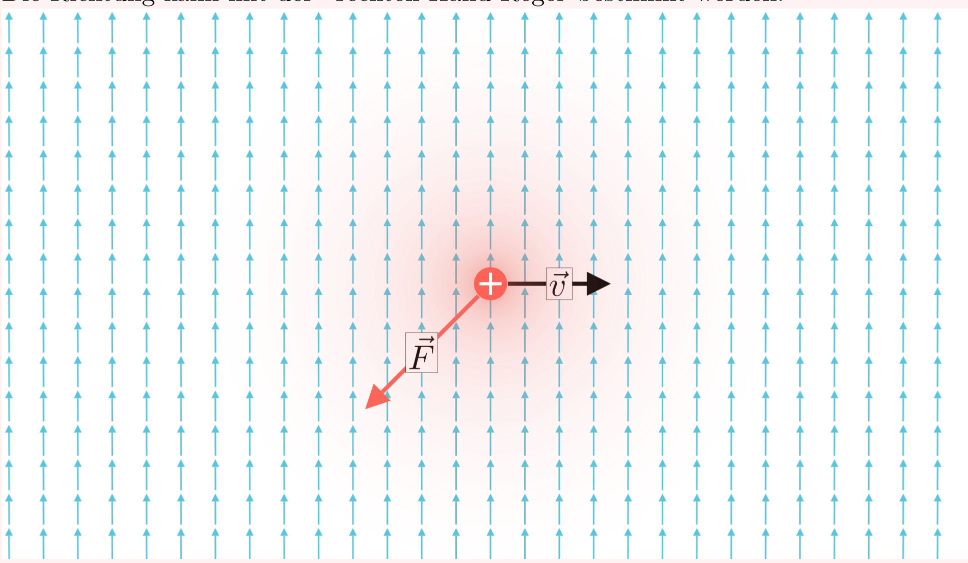
Bemerkenswert ist der Fakt, dass stromdurchflossene Leiter nicht nur ein eigenes Magnetfeld erzeugt, er erfährt auch eine Kraftwirkung in einem externen Magnetfeld, das von anderen stromführenden Leitern oder Magneten hervorgerufen wird. [Albach, 2020] Diese Kraftwirkung ist auch unter der Lorenzkraft bekannt. Diese Kraft gilt nicht nur für stromdurchflossene Leiter, sondern auch für geladen Teilchen.

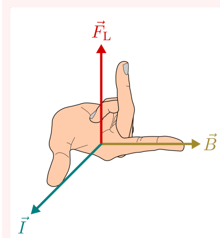
Definition 5.3.1: Lorenzkraft [Miller, 2024]

Bewegt sich ein geladenes Teilchen duch ein Magnetfeld, wirkt eine sogenannte Lorenzkraft. Diese zeigt in die Richtung des Kreuzprodukts der Bewegung und des Magnetfelds. Sie ist deffiniert als:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Die Richtung kann mit der "rechten Hand Regel"bestimmt werden.





Bemerkung:-

Die Kraft, welche ein stromdurchflossener Leiter erftährt kann mit der Formel für die Formel für die Lorenzkraft hergeleitet werden und lautet wie folgt.

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{s} \times \vec{B}).$$

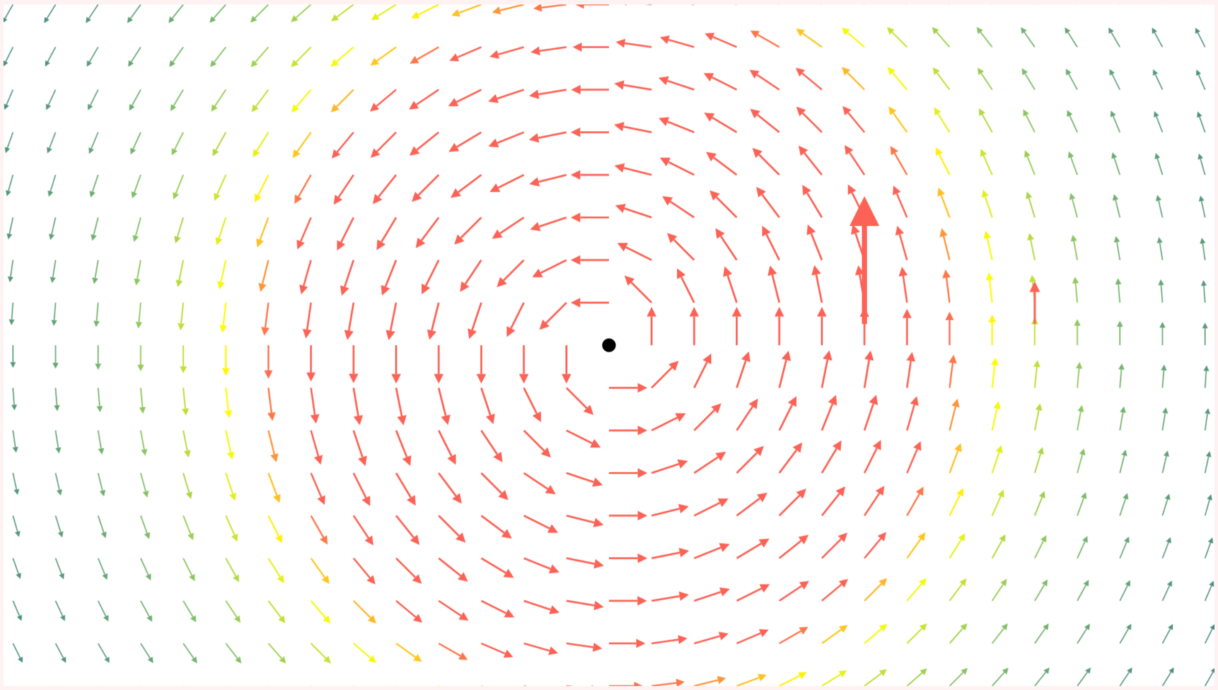
$\vec{s}$ ist die Länge des Leiters.

5.4 Oested'sches Gesetz

Definition 5.4.1: Oested'sches Gesetz

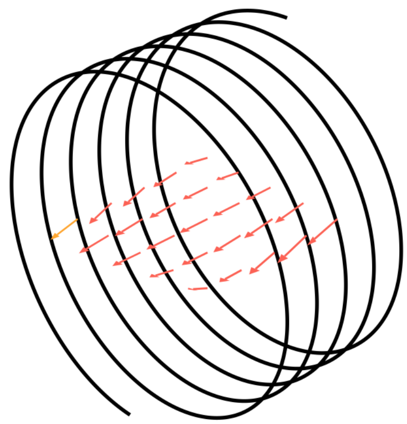
Um die Durchflutung, d.h. der resultierende Strom, welche durch eine Fläche fliesst zu berechnen verwendet man das Oestred'sche Gesetz.

$$\oint_C \vec{H} ds = \Theta = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \sum I_k \tag{5.2}$$



5.5 Zylinderspule

Wie sieht das Magnetfeld für eine Zylinderspule aus? Wenn man die Zylinderspule von vorne betrachtet kann man erkennen, dass diese aus mehreren Kreisförmigen Drähten besteht. Nach der "rechten Hand Regel"würde es ein Magnetfeld geben, welches durch die Spule geht.



Wenn man die äusseren Feldlinien ignoriert und annimmt, dass der Betrag der Feldstärke konstant ist, so ist die Induktion wie folgt definiert.

Definition 5.5.1: Induktion in einer Zylinderspule

Die Induktion in einer Zylinderspule kann mit der Formel

$$\oint_C \vec{H} ds = H \cdot l = \sum I_k = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{l} \tag{5.3}$$

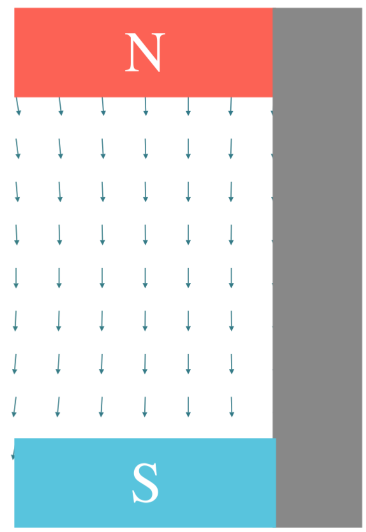
wobei l die Spulenlänge ist und N die Wicklungszahl der Zylinderspule.

5.6 Magnetische Spannung

Definition 5.6.1: Magnetische Spannung

Die magnetische Spannung beschreibt das Verhalten des magentischen Feldes entlang zwei Punkten. Sie ist definiert durch

$$V_{m12} = \int_2^1 \vec{H} d\vec{s} \tag{5.4}$$

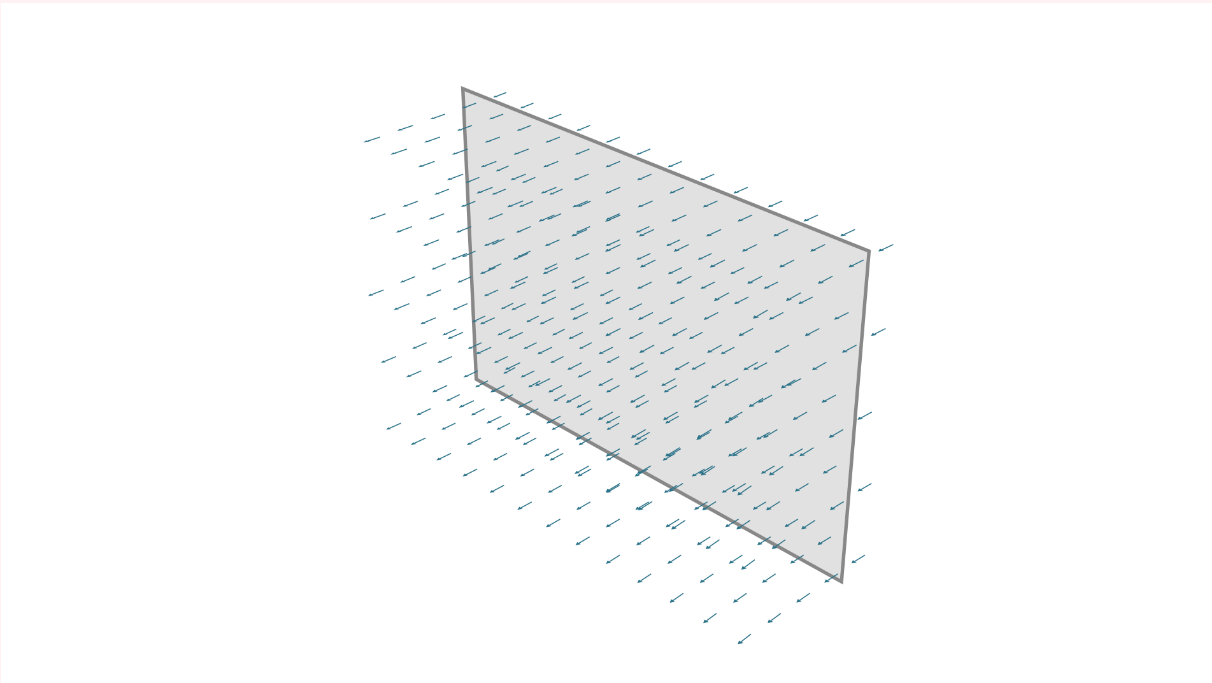


5.7 Magnetischer Fluss

Definition 5.7.1: Magnetischer Fluss [Miller, 2024]

Der magnetische Fluss bezeichnet den Fluss des B-Feldes durch eine Fläche.

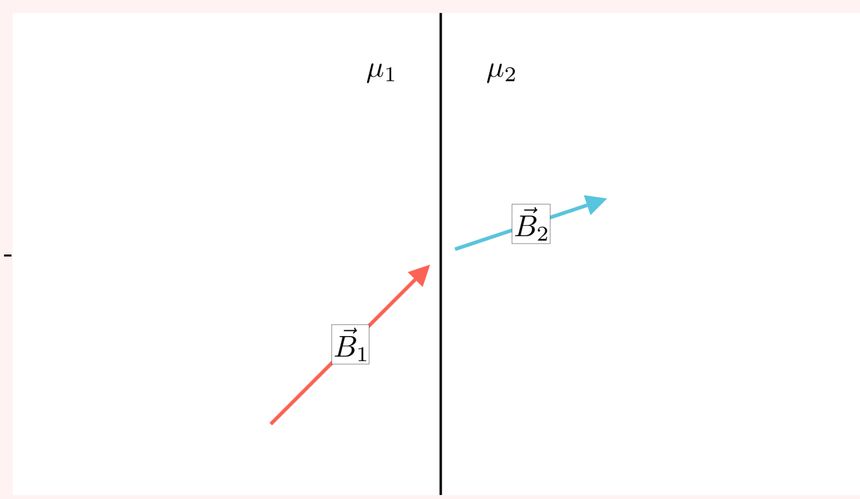
$$\Phi = \iint_A \vec{B} d\vec{A} \tag{5.5}$$



Da es keine magnetische Einzelladungen gibt, kann nirgendwo ein B-Feld entspringen oder verschwinden. Ähnlich wie bei der Stromdichte bedeutet dies, dass alles, was in eine Fläche hinein fliest, auch wieder herausfliesen muss. [Miller, 2024]

$$\oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \tag{5.6}$$

Definition 5.7.2: Das magnetische Feld an μ-Sprungstellen



$$B_{n1} = B_{n2} \tag{5.7}$$

$$H_{t1} = H_{t2} \tag{5.8}$$

Daraus folgt:

$$B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot B_{t1} \tag{5.9}$$

$$H_{n2} = \frac{\mu 1}{\mu 2} \cdot H_{n1} \tag{5.10}$$

5.8 Magnetische Polarisation

Definition 5.8.1: Magnetische Polarisation

Die magnetische Polarisation beschreibt den Prozess der Ausrichtung magnetischer Momente. Die Stoffe, die den Prozess durchgehen werden nach ihren magnetischen Eigenschaften in drei Gruppen eingeteilt. [Miller, 2024] Diese Eigenschaft wird durch die Permibilitätszahl gekennzeichnet. Dabei gilt:

- $\mu_r < 1$ sind diamagnetische Stoffe
- $\mu_r > 1$ sind paramagnetische Stoffe
- $\mu_r >> 1$ sind ferromagnische Stoffe

Während diamagnetische Stoffe das B-Feld geringfügig Schwächen, [Albach, 2020] da sie gegen das magnetische Feld wirken und paramagnetische Stoffe das B-Feld geringfügig stärken, [Albach, 2020] da sie mit das magnetische Feld wirken, haben ferromagnetische Stoffe eine besondere Eigenschaft.
Abgesehen von der Tatsache, dass ihre Permibilitätszahl sehr stark von 1 abweicht bilden ferromagnische Stoffe Weiss'sche Bezirke, in welchen die Polarisation einheitlich ist. Wird ein externes H-Feld angelegt, so richten sich diese Polarisationen langsam diesem H-Feld aus. Somit richten sich viele Weiss'sche Bezirke in die selbe Richtung und werden somit grösser. Diese Ausrichtung besteht auch, wenn das externe H-Feld ausgeschalten wird und folglich ist unser ferromagnetische Stoff selber ein Magnet geworden. [Miller, 2024]

Definition 5.8.2: Remanenz

Die Remanenz ist die Restmagnetisierung eines ferromagnischen Stoffes nach dem ausschalten eines externen Feldes. Sie wird mit der Hysteresekurve beschrieben.

Man kann anhand der Hysteresekurve sehen, dass ferromagnische Stoffe die einen externen Feld angelegt sind irgendwann gesättigt sind und zu einem Magnet werden. Man kann diesen Vorgang aber auch rückgängig machen, indem man den Stoff in ein externen Gegenfeld anlegt. Damit es funktioniert muss das Gegenfeld die Koerzitivfeldstärke als Betrag haben.

5.9 Reluktanzmodel

Es gibt Analogien zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Kreis. Dies zeigt die Folgende Tabelle.

Definition 5.9.1: Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis [Albach, 2020]

Bezeichnung	Elektrisches Netzwerk	Magnetisches Netzwerk
Leitfähigkeit	κ	μ
Wiederstand	$R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$	$R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$
Spannung	$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$V_{m12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}$
Strom bzw. Fluss	$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$
Ohm'sches Gesetz	$U = R \cdot I$	$V_m = R_m \cdot \Phi$
Maschengleichung	$U_0 = \sum_{\text{Masche}} R \cdot I$	$\Theta = \sum_{\text{Masche}} R_m \cdot \Phi$
Knotengleichung	$\sum_{\text{Knoten}} I = 0$	$\sum_{\text{Knoten}} \Phi = 0$

Nun können wir unsere magnetische Netzwerke als ein äquivalentes Netzwerk darstellen und analysieren. [Miller, 2024] Dadurch bekommen wir die folgende definition für den Magnetischen Wiederstand.

Definition 5.9.2: Magnetischer Wiederstand

Der magnetischer Wiederstand ist der Wiederstand, welches der magnetische Fluss wiederfährt wenn es durch ein Medium fliesst. Sie kann berechnet werden durch

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \cdot \mu_0} \tag{5.11}$$

5.10 Induktivität

Definition 5.10.1: Induktivität

Die Induktivität beschreibt die Fähigkeit, magnetische Energie speichern zu können. [Miller, 2024]

$$\Phi = L \cdot I \tag{5.12}$$

Das meistgebrauchte induktive Bauteil ist die Spule, [Miller, 2024]

5.11 Induktivitäten

Induktivitäten können vorallem bei schlaufenartigen Kabeln entdeckt werden. Sie kann berechnet werden durch das Umformen der Gleichung 5.12.

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{5.13}$$

Bei einer Spule müssen wir zwischen dem Gesamtfluss und dem Fluss durch eine Windung unterscheiden. Die Induktivität lässt sich wie folgt berechnen.

Definition 5.11.1: Induktivität einer Spule

$$\Phi_{ges} = N \cdot \Phi_A \tag{5.14}$$

$$L_{\text{Spule}} = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{l} \tag{5.15}$$

Bemerkung:-

Für Toroidspulen kann man die folgende Formel verwenden

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \cdot A_L \tag{5.16}$$

wobei A_L der magnetische Leitwert ist.

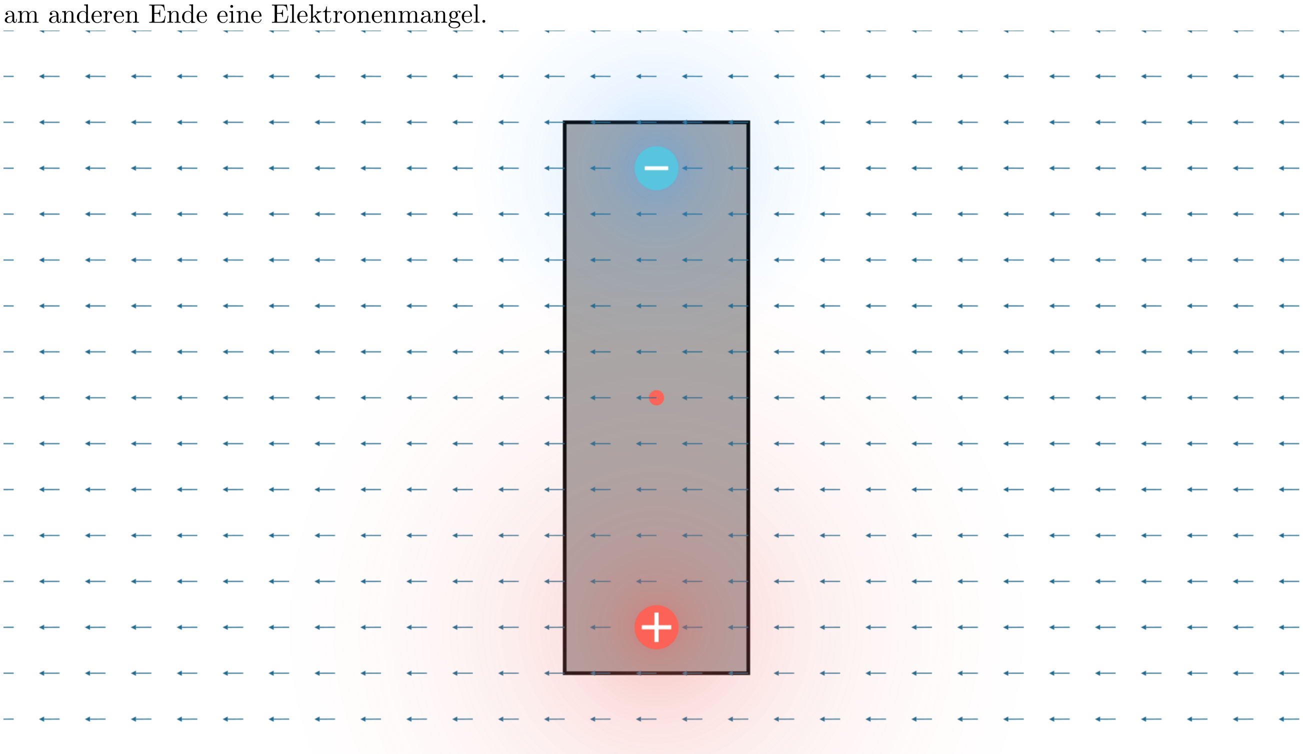
Kapitel 6

Das Zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld

6.1 Das Induktionsgesetz

In Kapitel 5.3 haben wir gelernt, dass auf elektrische Ladungen, welche durch ein magnetisches Feld sich bewegen eine Kraft ausgeübt wird. Wir betrachten nun grössere Anordnungen.

Nehmen wir an, dass sich ein Stück Metall durch ein magnetisches Feld bewegt. Aufgrund der Lorenzkraft bewegen sich die elektrische Ladungen innerhalb des Metalles. An einem Ende entsteht ein Elektronenüberschuss und am anderen Ende eine Elektronenmangel.



Das Metallstück kann nun als Spannungsquelle agieren. Wird es mit einem Widerstand verbunden, so fliesst ein Strom. Die Spannung der Spannungsquelle kann mit der folgenden Gleichung berechnet werden.

$$U_{12} = l \cdot v_x \cdot B = L \cdot \frac{dx}{dt} \cdot B \tag{6.1}$$

Da die Fläche der Leiterschleife mit der Zeit abnimmt, da das Metallstück immer näher zum Widerstand sich bewegt, können wir wir annehmen, dass

$$l \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}.$$

Daraus folgt, dass die Induzierte Spannung einer Leiterschleife wie folgt berechnet werden kann.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{6.2}$$

Bemerkung:-

Der in einer Leiterschleife induzierte Strom wirkt der ihn verursachenden Flussänderung entgegen. Deswegen ist das vorzeichen in Gleichung 6.2 negativ.

Was passiert wenn angenommen wird, dass anstelle von der Fläche der Leiterschleife das magnetische Feld sich ändert. Auch hier kann die Gleichung 6.2 verwendet werden. (Rechung [Albach, 2020] S. 261)

Bemerkung:-

Man unterscheidet zwischen der Bewegungsinduktion und der Ruheinduktion.

- Bei der Bewegungsinduktion verändert sich die Fläche der Leiterschleife
- Bei der Ruheinduktion verändert sich der magnetische Fluss

Die Berechnung der induzierten Spannung ist die selbe.

Für die Gleichung 6.2 haben wir angenommen, dass die Fläche der Leiterschleife sich linear ändert, weshalb eine zeitlich konstante Spannung induziert wird. Sobald jedoch die Fläche sich nicht mehr linear ändert ist die induzierte Spannung auch nicht mehr zeitlich konstant. Die induzierte Spannung ist nun von der Zeit abhängig.

$$u(t) = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{6.3}$$

Dies folgt aus dem Faraday'sche Induktionsgesetz.

Definition 6.1.1: Faraday'sche Induktionsgesetz

Das Faraday'sche Induktionsgesetz besagt, dass in einer Leiterschleife ein Strom fliesst, sobald der magnetischer Fluss, welcher abhängig ist mit der Leiterschleife sich zeitlich ändert.

6.2 Die Selbstinduktion

Nehmen wir an, dass durch die Leiterschleife ein zeitlich veränderlicher Strom fliesst. In Kapitel 5.7 haben wir gelernt, dass der Strom zusammenhängt mit dem magnetischen Fluss. Dieser Zusammenhang haben wir als Induktivität bezeichnet. Daraus folgt, dass eine Veränderung des Stroms zu einer Veränderung des magnetischen Flusses beiträgt. Dieses Phänomen wird Selbstinduktion genannt.

Definition 6.2.1: Selbstinduktion

Die Selbstinduktion ist die Induktionswirkung eines Stromes auf seinen eigenen Leitkreis. Die Induktionsspannung u_L ist proportional zur Änderungsrate $\frac{di}{dt}$ und es gilt

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{6.4}$$

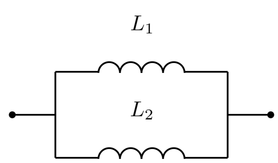
6.2.1 Einfache Induktivitätsnetzwerke

Das Zusammensetzen von mehreren Spulen kann den Widerständen gleichgesetzt werden. Deshalb gelten die folgenden Definitionen.

Definition 6.2.2: Seriegeschaltene Induktivitäten

$$L_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} L_k \tag{6.5}$$

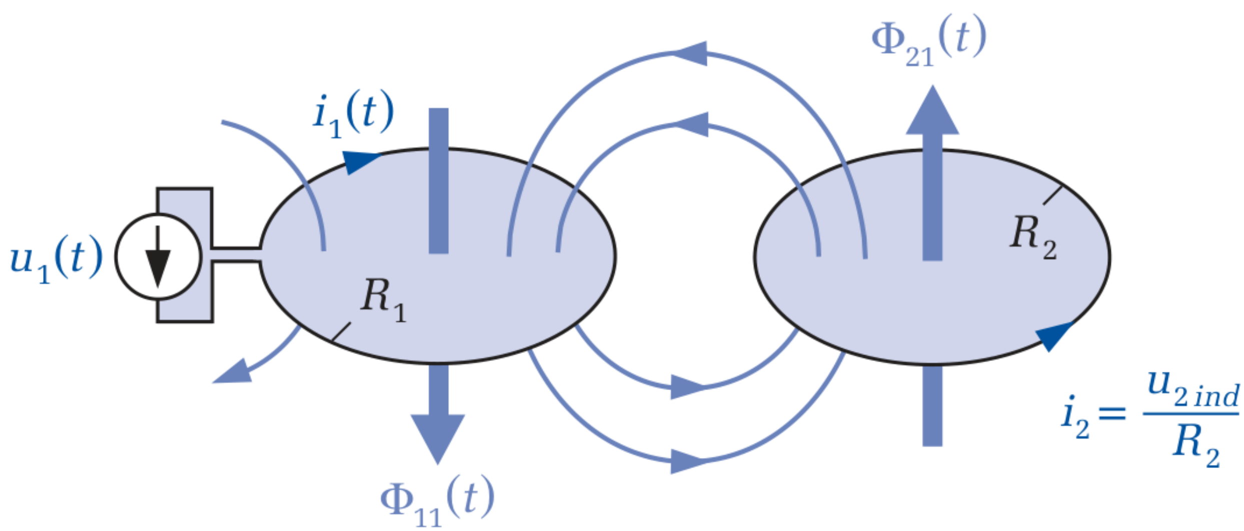
Definition 6.2.3: Parallelgeschaltene Induktivitäten



$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} \tag{6.6}$$

6.3 Die Gegeninduktion

Der magnetische Fluss, welches aus einer Leiterschleife resultiert, kann eine andere Leiterschleife beeinflussen. In Kapitel 6.1 haben wir gesehen, dass ein magnetischer Fluss eine Spannung in einer Leiterschleife induzieren kann. Dies ist auch hier der Fall. Betrachten wir die folgende Abbildung.



[Albach, 2020]
Wie vorher beschrieben wird in der zweiten Leiterschleife ein Spannung induziert aufgrund des magnetischen Flusses von der ersten Leiterschleife. Nun beeinflusst der magnetische Fluss von der zweiten Leiterschleife die erste Leiterschleife. Die Spannungen in den jeweiligen Leiterschleifen kann wie folgt berechnet werden.

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt} \tag{6.7}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{21} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{22} \cdot \frac{di_2}{dt} \tag{6.8}$$

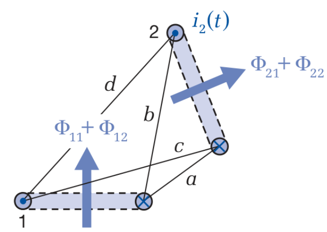
L_{11} und L_{22} sind die Selbstinduktivitäten von der ersten bzw. der zweiten Leiterschleife während L_{12} und L_{21} die Gegeninduktivitäten von der ersten bzw. der zweiten Leiterschleife sind. Da $L_{12} = L_{21}$ ([Albach, 2020] S. 274) bezeichnen wir die Gegeninduktion als M. Somit gilt für die induzierte Spannung die folgende Formel.

$$u_{\text{ind}} = M \cdot \frac{di_1}{dt} \tag{6.9}$$

6.3.1 Die Gegeninduktivität zweier Doppelleitungen

Für die Gegeninduktivität zweier Doppelleitungen gilt für den Faktor M folgendes.

$$M = \frac{\mu \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(\frac{bc}{ad}) \tag{6.10}$$



[Albach, 2020]

6.3.2 Die Koppelfaktoren

Definition 6.3.1: Der Koppelfaktor

Der Koppelfaktor ist ein Mass wie gut der magnetische Fluss einer Leiterschleife zur anderen übertragen lässt. Ist der Koppelfaktor hoch, so dringt fast der gesamte magnetische Fluss von der einen Spule zur anderen. Ist der Koppelfaktor niedrig, so dringt nur ein kleiner Teil des magnetischen Flusses von der einen Spule zur anderen.

$$k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{M}{L_{22}} \tag{6.11}$$

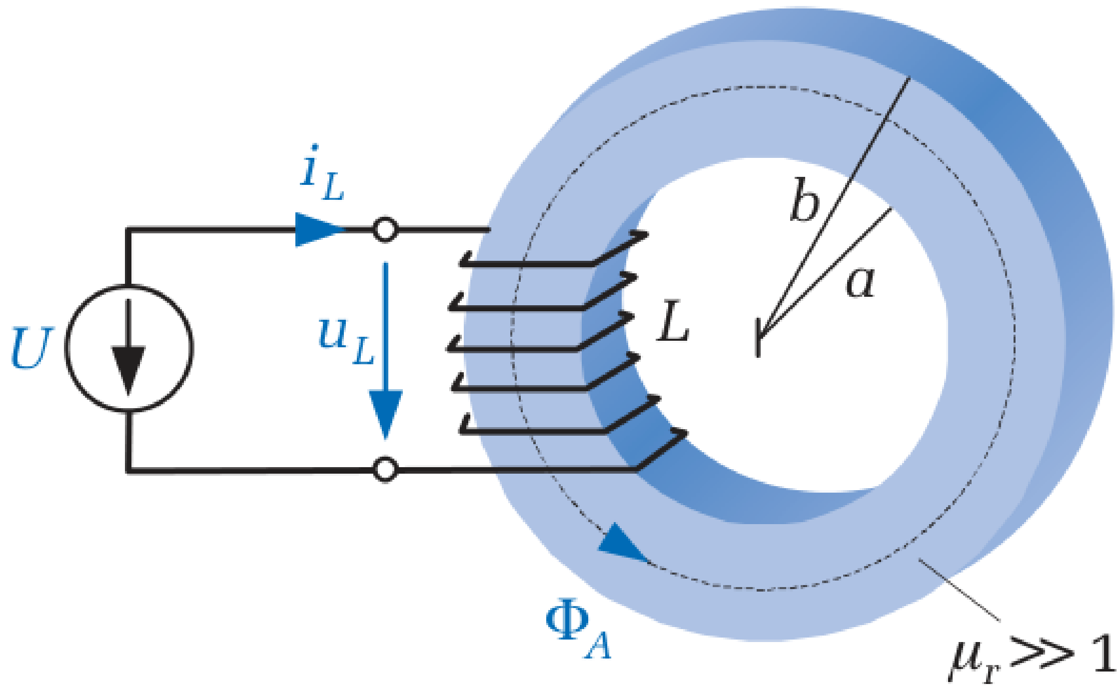
$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{M}{L_{11}} \tag{6.12}$$

$$k = \pm\sqrt{k_{12} \cdot k_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}} \tag{6.13}$$

6.4 Der Energieinhalt des Feldes

Definition 6.4.1: Die magnetische Energie

Unter der magnetischen Energie versteht man die Energie eines Magnetfeldes. Dies kann in Form eines Magneten oder, wie in den meisten, in Form einer Spule sein.



[Albach, 2020]
Nehmen wir als Beispiel eine Ringkernspule. Wenn ein Spannung an der Spule angesetzt wird so fliesst ein Strom. Durch die Energie, welche der Spule zugeführt erhöht sich die Flussdichte im Ringkern. Diese gespeicherte Energie kann mit der folgenden Gleichung berechnet werden.

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot I \tag{6.14}$$

Für 2 Spulen gilt die Formel

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2 \tag{6.15}$$

Für mehrere Spulen gilt die Formel

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k \tag{6.16}$$

Bemerkung:-

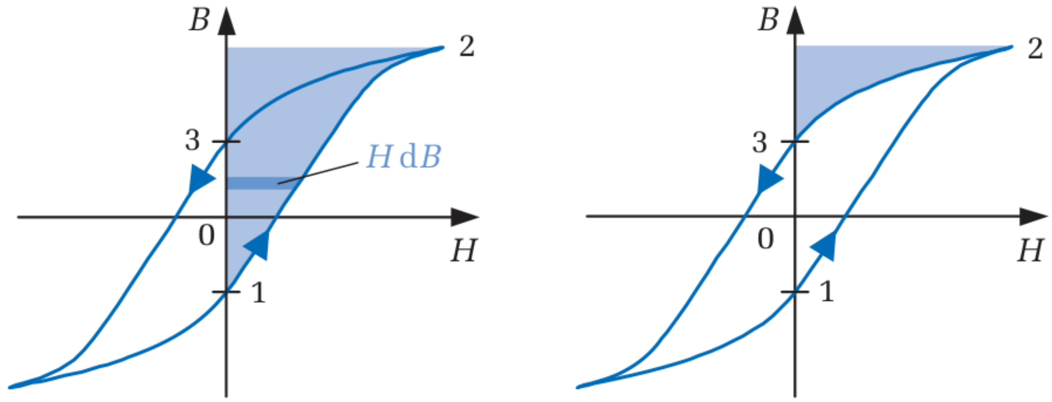
Das Berechnen der magnetischen Energie von mehreren Spulen werden wir nur selten gebrauchen.

Die magnetische Energie kann auch mit den Feldgrössen berechnet werden.

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \tag{6.17}$$

6.4.1 Hystereseverluste

Wie bei jedem Energie Prozess entstehen Energieverluste. Diese können anhand der Hysteresekurve veranschaulicht werden.



[Albach, 2020]
Im Allgemeinen gilt:

Bemerkung:-

Der Energieverlust beim Umlaufen der Hystereseschleife entspricht dem Produkt aus der von der Schleife umfassten Fläche und dem Kernvolumen. [Albach, 2020]

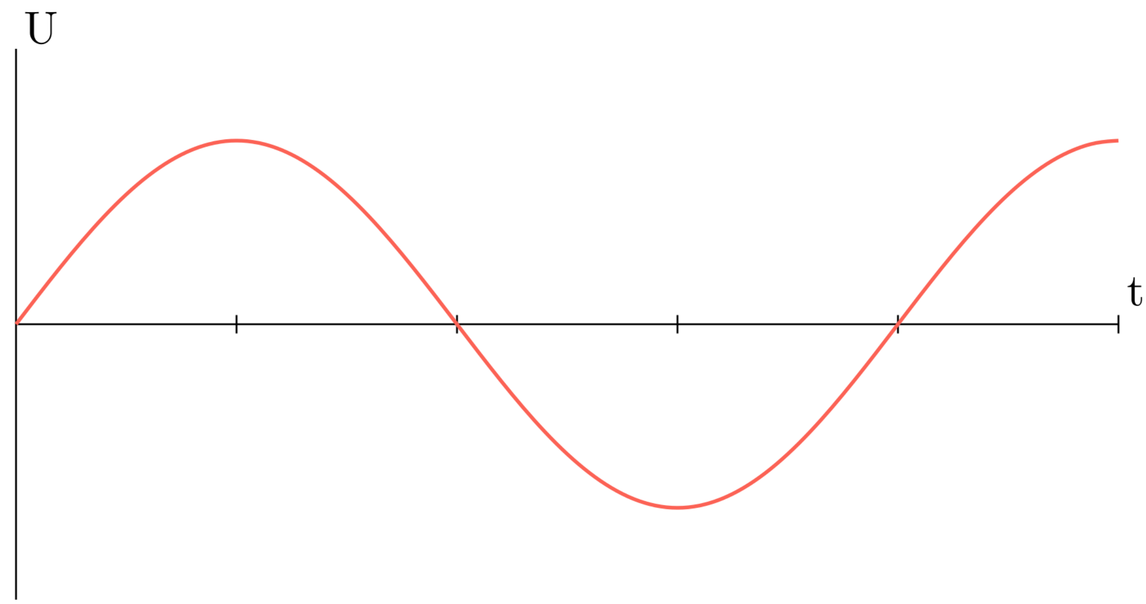
Was bedeutet dies? Um den Ringkern zu magnetisieren und zu entmagnetisieren wird Energie aufgewendet. Da dieser Prozess nicht Verlustfrei ist entstehen Energieverluste. Der Verlust entspricht der Fläche innerhalb der Hysteresekurve.

6.5 Anwendung der Bewegungsinduktion

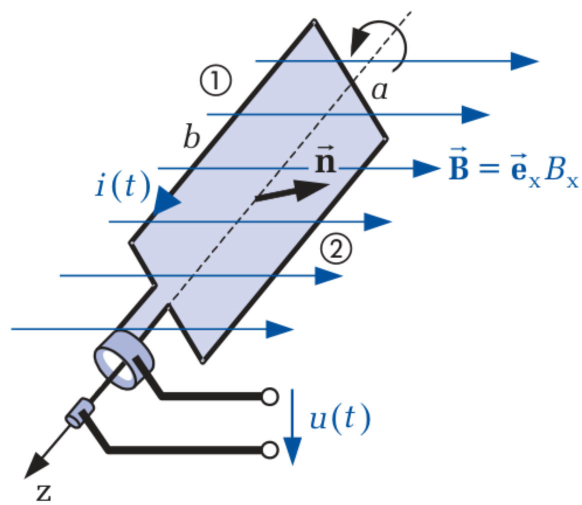
Die Bewegungsinduktion wird hauptsächlich zwischen zwei Anwendungen unterschieden. Bei der Umwandlung von mechanischer in elektrischer Energie wird das Prinzip eines Generators verwendet. Für die Umwandlung von elektrischer Energie in mechanische Energie wird das Prinzip eines Motors verwendet. Grundsätzlich ist der Aufbau beider Prinzipien gleich weshalb nur das Generatorprinzip angeschaut wird.

6.5.1 Das Generatorprinzip

In den bisherigen Kapiteln haben wir Gleichstrom und Gleichspannung behandelt. Der herkömmliche Strom, welche wir aus Steckdosen beziehen kommt in Form einer Wechselspannung.



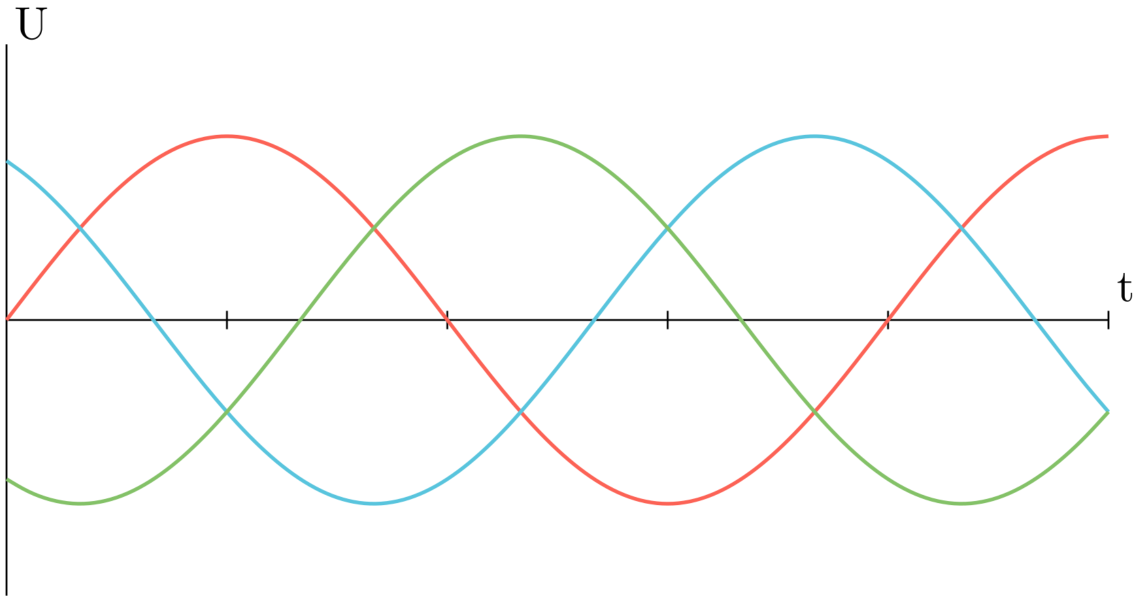
Wie man von der Abbildung sehen kann hat die Spannung eine sinusförmige Welle. Diese kann durch Induktion durch eine rotierende Leiterschleife in einem konstanten Magnetfeld erzeugt werden.



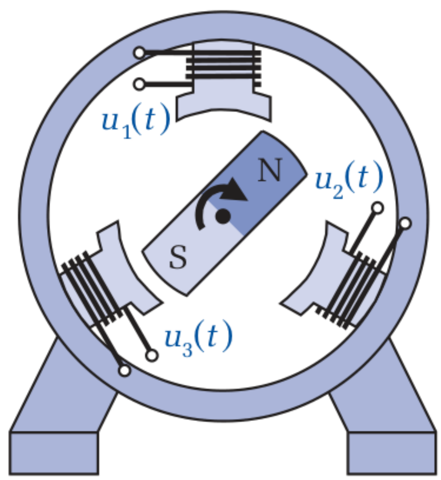
[Albach, 2020]
Die induzierte Spannung kann dann wie folgt berechnet werden.

$$U_{\text{ind}} = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{6.18}$$

Die Wechselspannung, welche wir verwenden kommt in Form von drei Phasen.



Diese kann generiert werden indem drei Leiterschleifen, welche 120° räumlich verschoben sind rotiert werden.



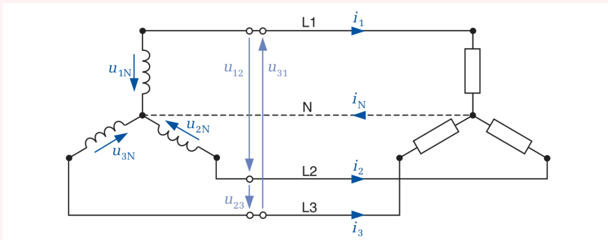
[Albach, 2020]
Doch welchen Vorteil verschafft ein Dreiphasensystem. Da die Wechselspannung nun aus drei Phasen besteht und jeder dieser Phasen bestromt werden kann, so kann eine grössere Leistung durch die Leitung geliefert werden. Dabei gilt für die Leistung.

$$P = U \cdot I \cdot \sqrt{3} \tag{6.19}$$

Dies bedeutet, dass in einem Dreiphasensystem fast doppelt so viel Leistung zu den Verbrauchern transportiert werden kann in Vergleich zum Einphasensystem.

Für die Übertragung zu den Verbrauchern können zwei Schaltungen verwendet werden.

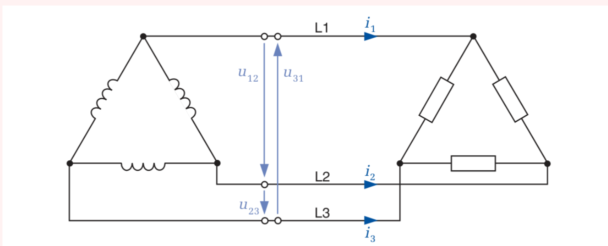
Definition 6.5.1: Sternschaltung



[Albach, 2020]

Bei der Sternschaltung werden die Spulen an einem Anschluss dem Sternpunkt zusammengeschaltet. [Albach, 2020] Die anderen Anschlüsse werden mit den Verbrauchern verbunden. Diese Leitungen werden Aussenleiter genannt. In den Aussenleitern fliesst der selbe Strom wie in den Strangleitungen während die Spannung um den Faktor $\sqrt{3}$ grösser ist.

Definition 6.5.2: Dreiecksschaltung



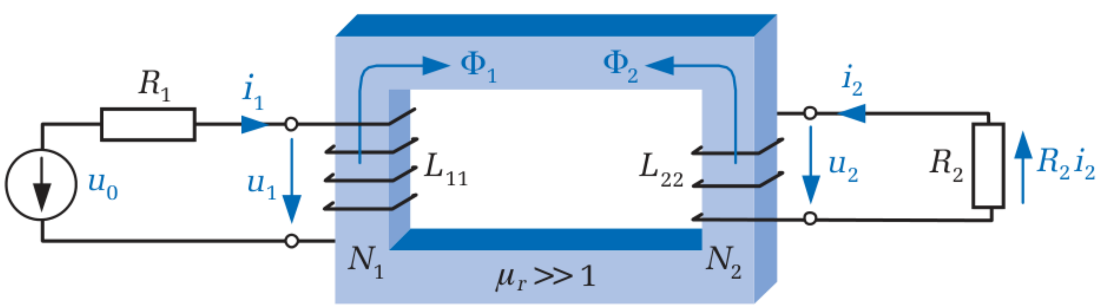
[Albach, 2020]

Bei der Dreiecksschaltung werden die Spulen in Serie geschaltet. In Vergleich zur Sternschaltung ist die Leiterspannung und die Strangspannung gleich, während der Leiterstrom um den Faktor $\sqrt{3}$ grösser ist als der Strangstrom.

In den meisten Fällen wird die Sternschaltung verwendet da diese einen Neutralleiter hat und aus Sicherheitsgründen verwendet wird.

6.6 Anwendung der Ruheinduktion

Eine wichtige Anwendung für die Ruheinduktion ist der Transformator (Übertrager). Diese haben vor allem in der Starkstromtechnik und in der Leistungselektronik eine grosse Bedeutung. Ihre Funktion besteht darin Spannungen zu transformieren und Leistungen zwischen galvanisch getrennten Netzwerken zu übertragen.



[Albach, 2020]

Ein Transformator besteht in den meisten Fällen aus einem Kern gewickelt von zwei Spulen. Der Kern führt den magnetischen Fluss von der einen Spule zur anderen. Dadurch wird eine Spannung induziert.

Bei den Transformatoren werden zwischen 3 verscheiden Vereinfachungen unterschieden.

Definition 6.6.1: Der Ideale Transformator

Beim idealen Transformator vernachlässigen wir jegliche Verluste im Draht und im Eisenkern. Folglich gelten die gegebenen Zusammenhänge.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{6.20}$$

Folglich ist diese Art von Transformator sehr stark vereinfacht, jedoch ungenau.

Definition 6.6.2: Verlustloser Transformator

In Kapitel 6.3 haben wir gelernt, dass Leiterschleifen, welche um ein Kern gewickelt sind sich gegenseitig beeinflussen können. Diese Gegeninduktion wird im Vergleich zum idealen Transformator berücksichtigt. Die induzierten Spannungen können wie in Kapitel 6.3 berechnet werden.

Definition 6.6.3: Der verlustbehaftete Transformator

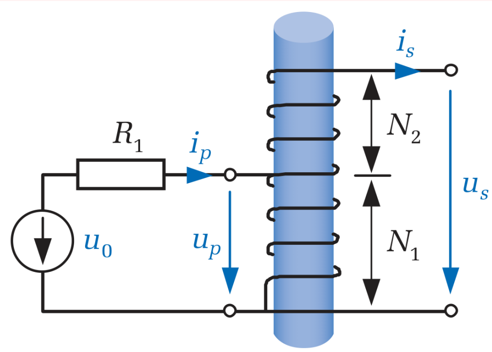
Für den verlustbehafteten Transformator wird neben der Gegeninduktion der Widerstand der Spulen berücksichtigt.

6.6.1 Der Spartransformator

Falls man eine Spannungsumwandlung benötigt, jedoch die zwei Spannungsnetzwerke nicht galvanisch getrennt sein müssen, so kann man auch ein Spartransformator verwenden. Diese hat einen viel einfacheren Aufbau im Vergleich zum normalen Transformator.

Definition 6.6.4: Der Spartransformator

Der Spartransformator ist eine kompakte Bauform des Transformators. Ein Teil der Wicklung wird sowohl von der Primär- als auch von der Sekundärseite verwendet.



[Albach, 2020]
Es gelten die folgenden Gleichungen.

$$\frac{u_p}{u_s} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{i_s}{i_p} \tag{6.21}$$

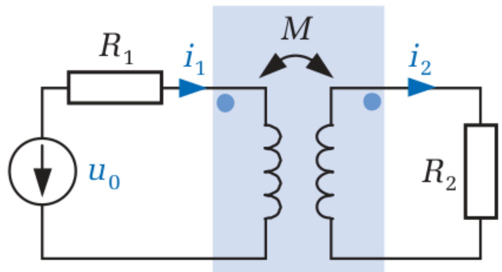
Bemerkung:-

Beim Spartransformator ist die Eingangsleitung und die Ausgangsleistung zu jedem Zweitpunkt gleich. Ist die Ausgangsspannung grösser als die Eingangsspannung, so ist der Ausgangsstrom kleiner als der Eingangsstrom und umgekehrt.

$$u_p \cdot i_p = u_s \cdot i_s.$$

6.7 Punktkonvention

In Schaltplänen kann man nicht erkennen, in welcher Richtung die Spule gewickelt ist. Durch die Punktkonvention kennzeichnet man mit einem Punkt wo der Draht der Spule vorne liegt. Dadurch kann man die Stromrichtung bestimmen.



[Albach, 2020]

Literaturverzeichnis

[Albach, 2020] Albach, M. (2020). *Elektrotechnik.* Pearson Deutschland GmbH.

[Miller, 2024] Miller, L. (2024). Übungsskript.

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim – Mathematical Animation Framework.