

Aufgabe 6

- a) 2 Eingänge (A und B), 1 Ausgang (Z)
2 Eingänge ergeben 2^2 Eingangskombinationen

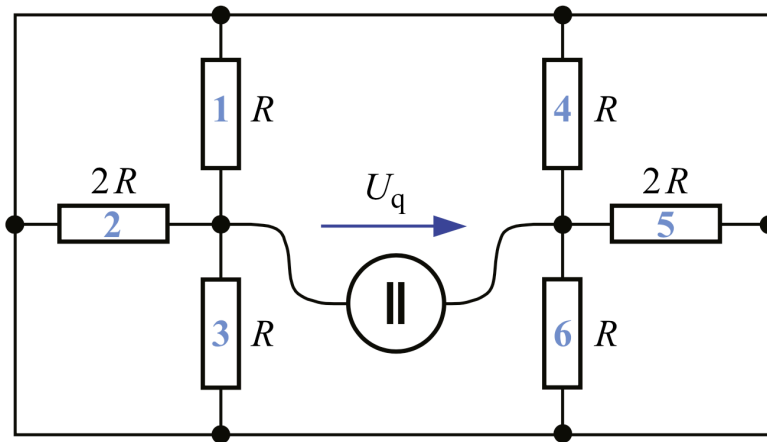
- b) NAND, OR, Inverter

- c) Wahrheitstabelle:

A	B	X	Y	V	Z
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0

- d) Aus der Wahrheitstabelle folgt: $Z = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ (XOR)
Aus dem Schaltbild folgt: $Z = (A \vee B) \wedge \overline{A \wedge B}$ was equivalent ist.
Funktion: Nur wenn die Eingänge A und B ungleich sind, ist der Ausgang Z=1, sonst '0'.

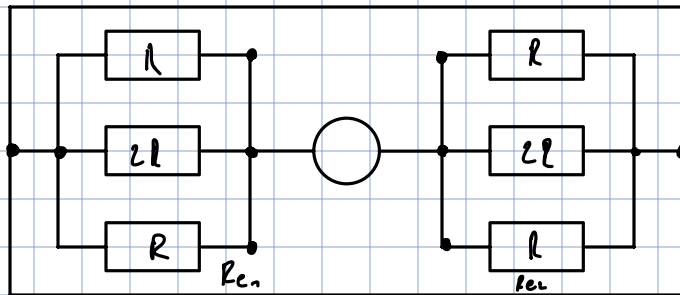
3.5-10 Netzwerkberechnung



Gegeben ist das in der obigen Abbildung dargestellte Widerstandsnetzwerk aus den Widerständen 1 bis 6, die alle einen ohmschen Widerstand von R oder $2R$ (siehe obige Abbildung) mit $R = 68,5 \Omega$ aufweisen, und einer Gleichspannungsquelle mit $U_q = 124 \text{ V}$.

- Bestimmen Sie die Stromstärke I_{ges} des von der Quelle abgegebenen Gesamtstroms in Abhängigkeit von U_q und R .
- Berechnen Sie die von der Quelle abgegebene Gesamtleistung P_{ges} .
- Wie teilt sich diese Leistung auf die einzelnen Widerstände auf? Bestimmen Sie die Leistungen P_1 bis P_6 , die auf die einzelnen Widerständen 1 bis 6 des Netzwerks entfallen.

a)



$$R_e = R \parallel 2R \parallel R + R \parallel 2R \parallel R$$

$$= \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$$

$$I_{\text{ges}} = \frac{U_q}{R_e} \approx 1,91 \text{ A}$$

b) $P_{\text{ges}} = UI = 252,38 \text{ W}$

c) $I_{e1} = I_{e2} = I_{\text{ges}} \quad U_{e1} = U_{e2} = \frac{1}{2} U_q$

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = U_6 = \frac{1}{2} U_q$$

$$P_1 = \left(\frac{U_q}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} = P_3 = P_4 = P_6 = 50,5 \text{ W}$$

$$P_2 = P_5 = \left(\frac{U_q}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2R} = 25,2 \text{ W}$$

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 1

Aufgabe 1.1

1.1a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + bx_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 5 \\ 2bx_2 + 2ax_3 &= b \end{aligned}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} (*)$$

Fall $b = 0$: Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- i) $a = 0$: $x_3 = s$, $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ → 2 Parameter;
ii) $a \neq 0$: $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5}{3}$ → 1 Parameter.

Fall $b \neq 0$: $-2b$ Pivot in (*):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & b \end{array}$$

- i) $a = 0$: keine Lösung;
ii) $a \neq 0$: $x_3 = \frac{b}{2a}$, $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2b}{3a}$ → eindeutig.

Also:

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 2

Aufgabe 2.1

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.1a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$AB, BA, Ax, A^2 := AA, B^2, BB^\top, B^\top B, y^\top x, yx, xy^\top, B^\top y, y^\top B.$

Lösung: Es gilt:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -9 \\ 10 & 1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BB^\top = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^\top B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$$y^\top x = [-2 \quad 1 \quad 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = 25$$

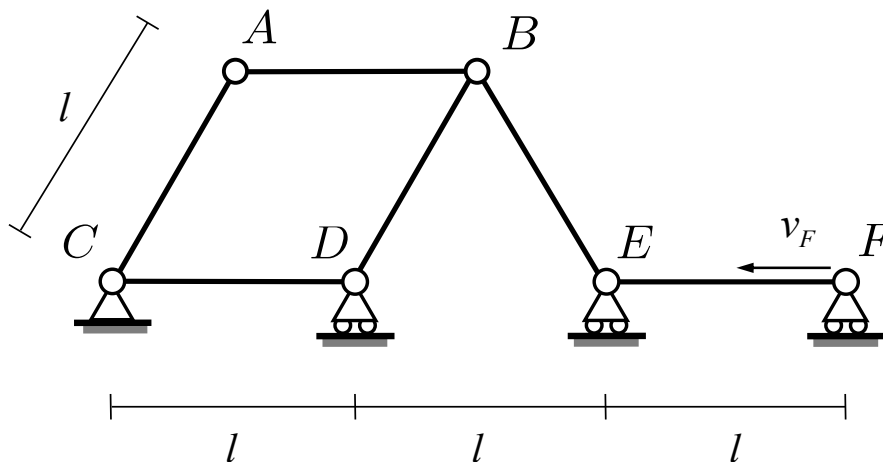
$$xy^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} [-2 \quad 1 \quad 5] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -14 & 7 & 35 \\ -8 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B^\top y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y^\top B = [-2 \quad 1 \quad 5] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [-3 \quad 2]$$

Die Matrixprodukte BA, B^2 und yx sind nicht definiert.

1. Das unten dargestellte ebene System besteht aus sechs starren Stäben gleicher Länge l , die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Punkt F bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_F nach links, wie in der Skizze eingezeichnet.



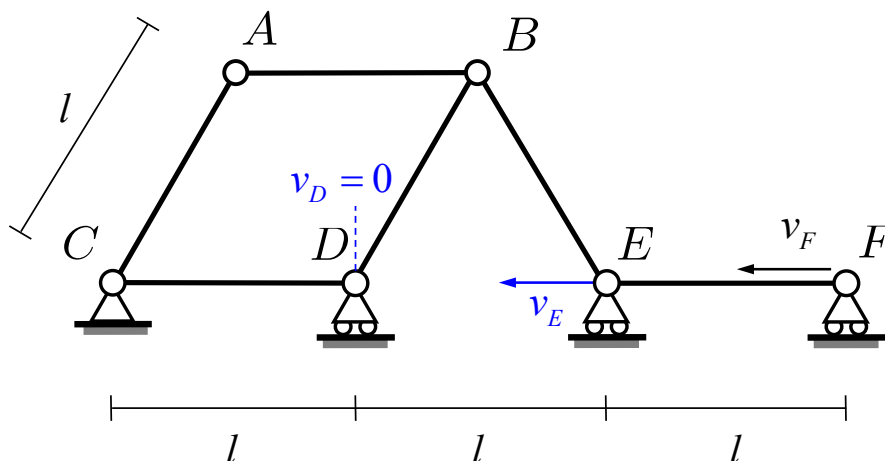
Bestimmen Sie für das Fachwerk die folgenden Parameter:

1. Geschwindigkeit \mathbf{v}_E
2. Geschwindigkeit \mathbf{v}_D
3. Geschwindigkeit \mathbf{v}_B
4. Geschwindigkeit \mathbf{v}_A

Lösung:

1. Beide Punkte E und F können sich nur horizontal bewegen. Bei Anwendung des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG) auf Stab EF , müssen die Geschwindigkeit in den Punkten E und F gleich sein:

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{F\parallel} = \mathbf{v}_{E\parallel} = \mathbf{v}_E \quad (1)$$

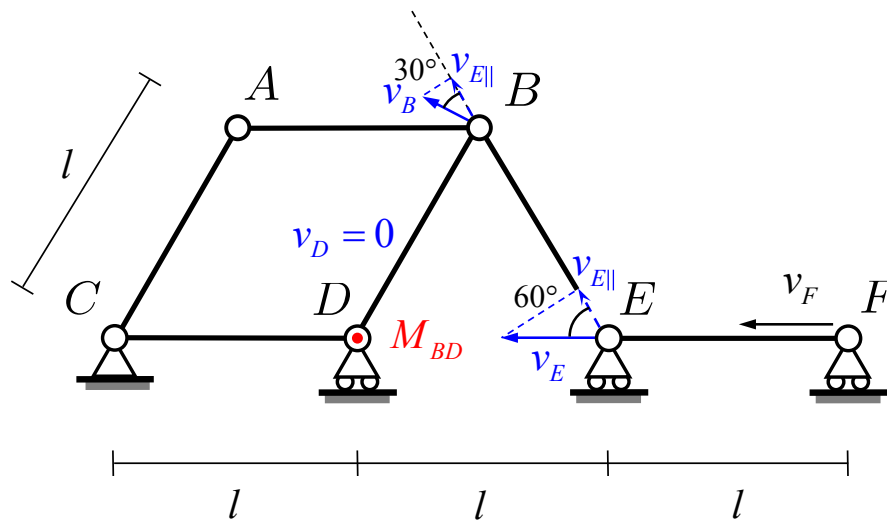


2. Die Berechnung von \mathbf{v}_D kann ähnlich zur Berechnung von \mathbf{v}_E erfolgen. Da Punkt C fix ist und Punkt D sich nur horizontal bewegen kann, muss die Geschwindigkeit in D gleich 0 sein (SdpG):

$$\mathbf{v}_C = 0 = \mathbf{v}_{C\parallel} = \mathbf{v}_{D\parallel} = \mathbf{v}_D \quad (2)$$

3. Die Geschwindigkeit in B kann entweder mit dem **Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG) graphisch**, **SdpG vektoriell** oder mit Hilfe des **Satzes vom Momentanzentrum (SvM)** bestimmt werden. Die 3 Methoden sind äquivalent und führen genau zur selben Lösung. Im Rahmen dieser Aufgabe sind alle 3 Methoden ausführlich erklärt, damit jede/r alle Methoden ausprobieren und für zukünftige Aufgaben die passende wählen kann.

SdpG graphisch: Es wird genau dasselbe Prinzip wie für die vektorielle Methode angewendet. Der Unterschied liegt in der Berechnungsmethode: Anstatt mit kartesischen Vektoren zu rechnen, werden die Vektoren graphisch gezeichnet und nur die entsprechenden Skalare berechnet.



Als ersten Schritt werden die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_D und \mathbf{v}_E in der Skizze eingezeichnet. \mathbf{v}_E muss horizontal verlaufen, da den Rolllager keine andere Bewegung erlaubt. Da $\mathbf{v}_D = 0$, wird Punkt D das Momentanzentrum M_{BD} vom Stab BD . Daraus folgt, dass $\mathbf{v}_{D||} = 0$ und \mathbf{v}_B senkrecht zur Stab BD sein muss.

Nachher wird die entsprechende Projektion in Stabsrichtung $\mathbf{v}_{E||}$ gezeichnet und der Projektionswinkel ermittelt. Da das Dreieck BDE gleichschenkelig ist, beträgt der Projektionswinkel von \mathbf{v}_E zu $\mathbf{v}_{E||}$ genau 60° . Damit kann der Betrag $v_{E||}$ berechnet werden:

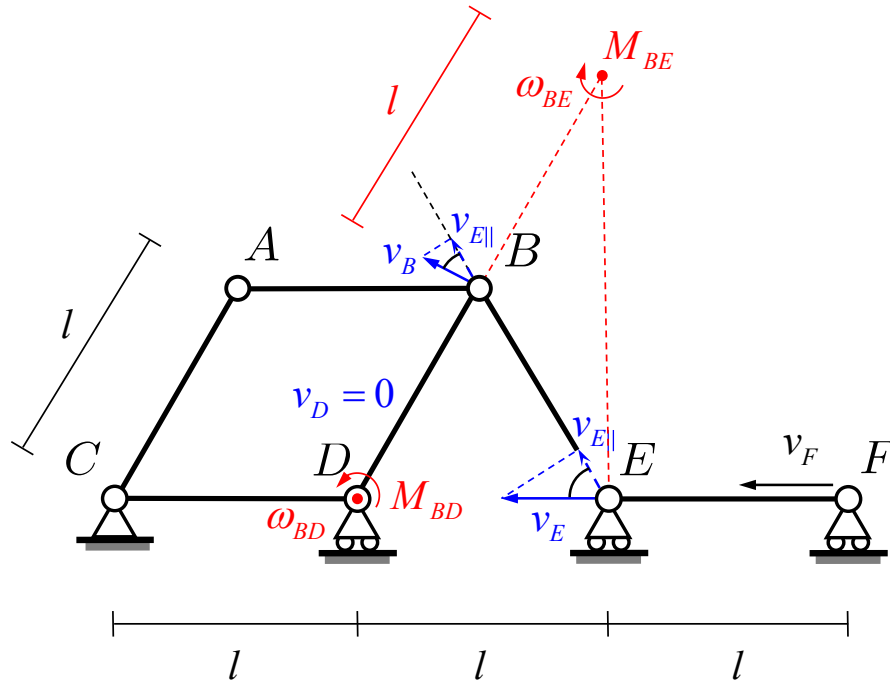
$$v_{E||} = v_E \cdot \cos 60^\circ = \frac{v_E}{2} = \frac{v_F}{2} \quad (3)$$

Da Punkt D das Momentanzentrum ist, muss die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B senkrecht zum Stab BD sein. $\mathbf{v}_{E||}$ kann in die selbe Richtung vom Stab BE gezeichnet werden und der Winkel für die Projektion beträgt dann 30° . Der Betrag v_B kann dann wie folgt berechnet werden:

$$v_{E||} = v_B \cdot \cos 30^\circ \quad (4)$$

$$v_B = \frac{v_{E||}}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_{E||} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \quad (5)$$

SvM: Dieses Verfahren ist auch graphisch basiert und anders als beim SdpG wird die momentane Rotation des Stabes betrachtet, anstatt die Geschwindigkeit entlang der Stabachse. Die untere Skizze dient als graphische Darstellung der Lösung:



Um die Geschwindigkeit im Punkt B zu definieren, ist das Momentanzentrum und die entsprechende Winkelgeschwindigkeit von mindestens einem mit Punkt B verbundenen Stab nötig. Für diesen Fall sind die Stäbe AB , BD und BE mögliche Kandidaten. Da aber die Geschwindigkeit vom Punkt A unbekannt ist, ist es sinnvoller mit den Stäben BD und BE anzufangen.

Als erstes werden die Momentanzentren von den gewählten Stäben definiert:

- Da Punkt D fix ist und Punkt B beweglich ist (keine reine Translation möglich), muss M_{BD} sich am Punkt D befinden.
- M_{BE} muss senkrecht zur Geschwindigkeit \mathbf{v}_E und \mathbf{v}_B sein. Da der Stab BD eine Rotation um den Punkt D ausführt, muss die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B senkrecht zum Stab BD sein. Damit kann M_{BE} eindeutig bestimmt werden (siehe Skizze).

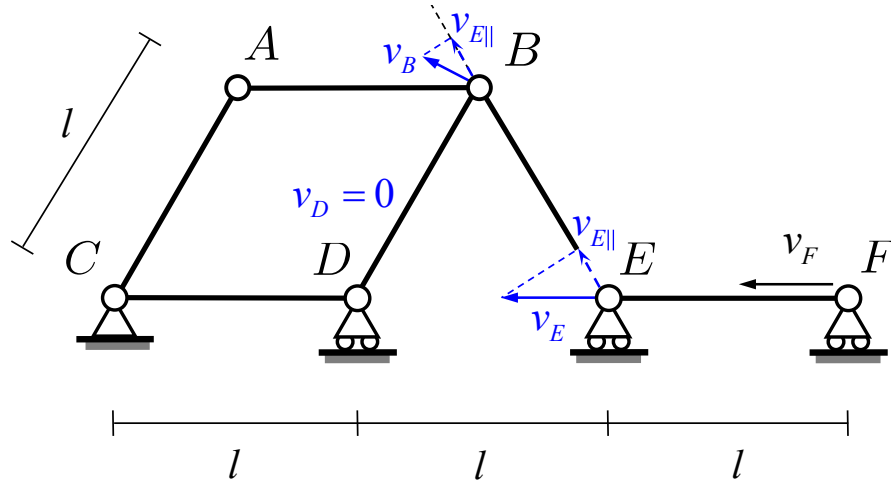
Als nächstes kann ω_{BE} aus \mathbf{v}_E bestimmt werden (skalare Größen, die Richtungen sind in der Skizze ersichtlich):

$$\omega_{BE} \cdot \sqrt{3}l = v_E \quad \Rightarrow \quad \omega_{BE} = \frac{v_E}{\sqrt{3}l} = \frac{\sqrt{3}v_F}{3l} \quad (6)$$

Und daraus ergibt sich \mathbf{v}_B durch:

$$v_B = \omega_{BE} \cdot l = \frac{v_E}{\sqrt{3}l} l = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \quad (7)$$

SdpG vektoriell: Die folgende Skizze zeigt die berechneten Vektoren:



Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B kann wie folgt durch den SdpG berechnet werden:

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{e}_{EB} = 0 \quad (8)$$

Wobei \mathbf{v}_E aus Aufgabenteil 1 bekannt ist:

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} -v_F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Und der Einheitsvektor \mathbf{e}_{BE} entlang des Stabes BE verläuft. Da das Dreieck BDE gleichschenkelig ist, müssen alle Eckwinkeln 60° betragen. Daraus ergibt sich \mathbf{e}_{BE} als:

$$\mathbf{e}_{EB} = \begin{pmatrix} -\sin 60^\circ \\ \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

\mathbf{v}_B muss dann senkrecht zum Stab BD verlaufen, da $\mathbf{v}_D = 0$ und dementsprechend muss die Geschwindigkeit entlang des Stabes BD ($\mathbf{v}_{D||} = 0$) null sein (siehe Skizze). Die Richtung von \mathbf{v}_B kann entweder graphisch abgelesen werden oder durch einen senkrechten Vektor zum Stab BD berechnet werden:

$$\mathbf{e}_{DB} = \begin{pmatrix} \sin 60^\circ \\ \cos 60^\circ \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_{v_B} = \mathbf{R}[\theta = 90^\circ] \cdot \mathbf{e}_{DB} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin 60^\circ \\ \cos 60^\circ \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Daraus kann \mathbf{v}_B wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{v}_B = v_B \cdot \mathbf{e}_{v_B} = v_B \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 8 kann v_B berechnet werden:

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{e}_{EB} = 0 \quad (17)$$

$$\left(v_B \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -v_F \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

$$\left(-v_B \frac{\sqrt{3}}{2} + v_F \right) \cdot -\frac{1}{2} + \left(v_B \frac{1}{2} - 0 \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (19)$$

$$v_B \frac{\sqrt{3}}{4} - v_F \frac{1}{2} + v_B \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad \left| + v_F \frac{1}{2} \right. \quad (20)$$

$$v_B \frac{\sqrt{3}}{2} = v_F \frac{1}{2} \quad \left| * \frac{2\sqrt{3}}{3} \right. \quad (21)$$

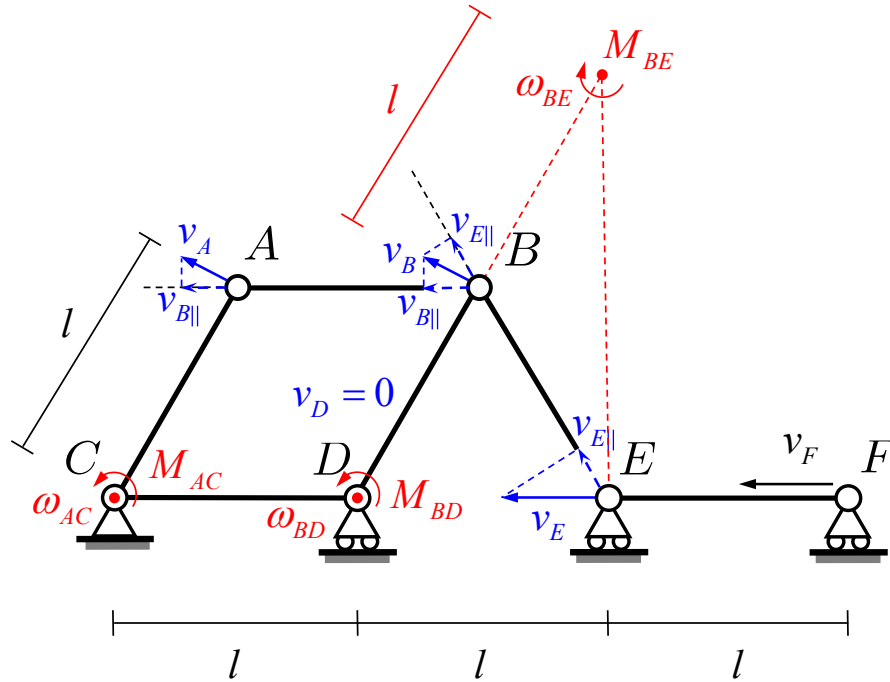
$$v_B = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \quad (22)$$

Und in Vektorform:

$$\mathbf{v}_B = v_B \cdot \mathbf{e}_{v_B} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Bemerkung: Der SdpG basiert auf dem Skalarprodukt und darum kann immer nur eine Variable ausgerechnet werden, auch wenn z.B. ein 2D-System eine x- und y-Koordinate hat. Dafür wurde in diesem Beispiel die Richtung vom Geschwindigkeitsvektor in B (\mathbf{e}_{v_B}) im Voraus bestimmt, damit das Verhältnis zwischen v_{Bx} und v_{By} festgesetzt werden konnte.

4. \mathbf{v}_A kann entweder durch den SdpG oder durch den SvM bestimmt werden. Die unten abgebildete Skizze dient als graphische Darstellung von beiden Methoden.



Ähnlich zu Stab BD, ist auch Stab AC an einem Punkt fix und am anderen beweglich. Der Punkt C ist somit das Momentanzentrum vom Stab AC. Demzufolge muss \mathbf{v}_A senkrecht zum Stab AC stehen (siehe Skizze).

SdpG: Dank der Projektion der Geschwindigkeit auf Stab AB kann \mathbf{v}_A wie folgt bestimmt werden:

$$v_{B\parallel} = v_B \cdot \cos 30^\circ \quad (24)$$

$$v_A = \frac{v_{B\parallel}}{\cos 30^\circ} = \frac{v_B \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = v_B \quad (25)$$

SvM: Die Parallelogrammregel, angewendet auf das Parallelogramm ABCD, liefert die folgenden Gleichungen:

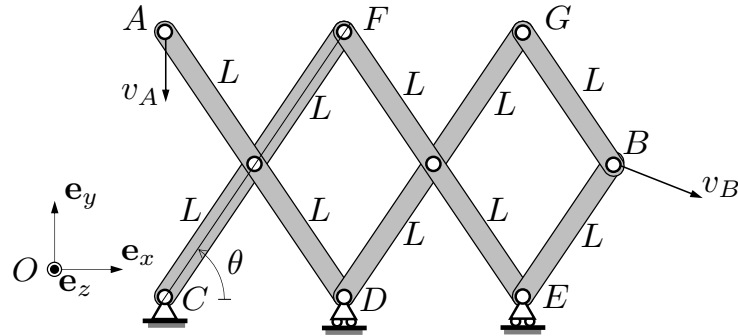
$$\omega_{AB} = \omega_{CD} \quad \omega_{AC} = \omega_{BD} \quad (26)$$

Im Zusammenhang mit den untenstehenden Gleichungen aus dem SvM, müssen v_A und v_B gleich sein:

$$v_A = \omega_{AC} l \quad v_B = \omega_{BD} l \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B \quad (27)$$

Bemerkung: Aus einer anderen Perspektive gesehen, wenn der Stab CD fix ist (das bedeutet $\omega_{AB} = \omega_{CD} = 0$), führt der Stab AB eine reine Translation aus. In diesem Fall hat jeder Punkt auf dem Stab AB genau die selbe Geschwindigkeit.

4. Das gezeigte System besteht aus starren Stäben der Längen $2L$ und L , die an ihren Mittel- und Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, wie in der Skizze dargestellt. Der Punkt C ist am Boden angelenkt, während die Punkte D und E sich nur in der dargestellten horizontalen \mathbf{e}_x -Richtung bewegen dürfen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = -v_A \mathbf{e}_y$ des Punktes A ist bekannt. Bezeichnen Sie mit θ den Winkel, den der Stab CF mit der \mathbf{e}_x -Richtung einschliesst.



Was ist die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B des Punktes B ?

- (a) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \mathbf{e}_y$
 (b) $\mathbf{v}_B = \frac{1}{2}v_A \tan \theta \mathbf{e}_x$
 (c) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \sin \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{5}v_A \cos \theta \mathbf{e}_y$
 (d) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \cos \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \sin \theta \mathbf{e}_y$
 (e) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \cos \theta \mathbf{e}_x$

Lösung:

Die Lage des Punktes B ist

$$\mathbf{r}_B = 5L \cos \theta \mathbf{e}_x + L \sin \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{r}_{OC}, \quad (8)$$

wobei O der Ursprung des Koordinatensystems $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ ist.

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_B = L\dot{\theta}(-5 \sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y). \quad (9)$$

Wir müssen noch $\dot{\theta}$ bestimmen. Dies ist möglich, wenn man bedenkt, dass F das Momentanzentrum des Stabes AD ist, da die Geschwindigkeit von D in \mathbf{e}_x -Richtung gerichtet sein muss. Durch Anwendung des SvM ergibt sich dann

$$-v_A \mathbf{e}_y = -\dot{\theta} \mathbf{e}_z \times (-2L \cos \theta) \mathbf{e}_x \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{v_A}{2L \cos \theta}, \quad (10)$$

wobei $\boldsymbol{\omega}_{AD} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_z$ aus Symmetrieüberlegungen folgt (der Balken AD rotiert mit gleicher und entgegengesetzter Geschwindigkeit wie der Balken CF). Setzt man $\dot{\theta}$ in (9) ein, erhält man

$$\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \mathbf{e}_y. \quad (11)$$

1.2. Logik

(a) Was bedeuten die folgenden Aussagen? Sind sie wahr oder falsch?

- 1) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
- 2) $\forall x \in \mathbb{N} : (x > 10) \vee (x < 10)$
- 3) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (q \neq 0 \Rightarrow x = p/q)$
- 4) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (c|ab) \Rightarrow (c|a) \vee (c|b)$

Bemerkung: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a|b$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = ac$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck:

- 1) 24 ist keine Quadratzahl.
- 2) Keine natürliche Zahl ist grösser als alle anderen natürlichen Zahlen.

Lösung.

- (a) 1) Bedeutung: *Für alle $x \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \mathbb{N}$, sodass $y > x$.*
Die Aussage ist wahr, zumal $y = x + 1$ die gewünschte Ungleichung erfüllt und $x + 1 \in \mathbb{N}$.
- 2) Bedeutung: *Für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt entweder die Ungleichung $x > 10$ oder $x < 10$.*
Die Aussage ist falsch, da $x = 10$ keine der beiden Ungleichungen erfüllt.

3) Bedeutung: *Es gibt eine reelle Zahl, sodass $x \neq p/q$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$. Anders gesagt: *Es gilt $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$.**

Die Aussage ist wahr, da π beispielsweise irrational ist, also nicht durch einen Bruch darstellbar.

4) Bedeutung: *Für jedes Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt, dass wenn c das Produkt von a und b teilt, dann teilt c entweder a oder b .*

Die Aussage ist falsch. Man betrachte z.B. $a = 2, b = 2, c = 4$. Dann gilt 4 teilt $4 = 2 \cdot 2$, aber offensichtlich teilt 4 nicht 2.

(b) 1) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq 24$ **oder** $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \neq 24$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$ **oder** $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m)$

Hinweis: Es gibt auch andere, korrekte Lösungen. Im Zweifelsfall wenden Sie sich an Ihren Übungsassistenten.

1.4. Induktion

Beweisen Sie die folgenden Formeln mittels Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n .

(b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ für alle natürlichen Zahlen n .

(c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

(d) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung.

(a) **Verankerung:** Im Fall $n = 1$ ist die Formel trivial:

$$1^2 = 1 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\&= (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\right) \\&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6n+6) \\&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ gezeigt und die allgemeine Formel daher per Induktion bewiesen.

(b) **Verankerung:** Im Fall $n=1$ ist die Formel trivial:

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1}{2}1 \cdot 2\right)^2$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun die folgende Summe:

$$\begin{aligned}1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\&= \left(\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\right)^2,\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$.

(c) **Verankerung:** Im Fall $n=0$ ist die Formel schlicht die dritte binomische Formel:

$$(1+x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

Induktionsannahme: Die Formel gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir nun das folgende Produkt:

$$\begin{aligned}(1+x) \dots (1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2 \cdot 2^{n+1}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x},\end{aligned}$$

wobei beim ersten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme angewandt und beim dritten Gleichheitszeichen die dritte binomische Formel verwendet wurde. Somit haben wir die gewünschte Formel für $n+1$ gezeigt.

(d) **Verankerung:** Für $n=1$ ist die Aussage trivial:

$$\sum_{k=1}^1 k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

Induktionsannahme: Die Formel gelte nun für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Betrachten wir die Summe, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=1}^n k \cdot k! \\ &= (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

was die gesuchte Identität für $n+1$ ist.

3 Task 3: Task 3: Equivalent Resistance

3.1 Musterlösung

```
#include <iostream>

int main() {
    // input
    std::cout << "Please enter R1\n";
    int R1;
    std::cin >> R1;

    std::cout << "Please enter R2\n";
    int R2;
    std::cin >> R2;

    std::cout << "Please enter R3\n";
    int R3;
    std::cin >> R3;

    std::cout << "Please enter R4\n";
    int R4;
    std::cin >> R4;

    // computation
    const int R12 = R1 + R2;
    const int R34 = R3 + R4;
    const int R = (R12 * R34 + (R12 + R34) / 2) / (R12 + R34);

    // output
    std::cout << "Equivalent resistance: " << R << "\n";
    return 0;
}
```