Lineare Algebra

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Lineare Algebra (HS24) von V. Gradinaru und dem Skript "Lineare Algebra" von Vasile Gradinaru.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

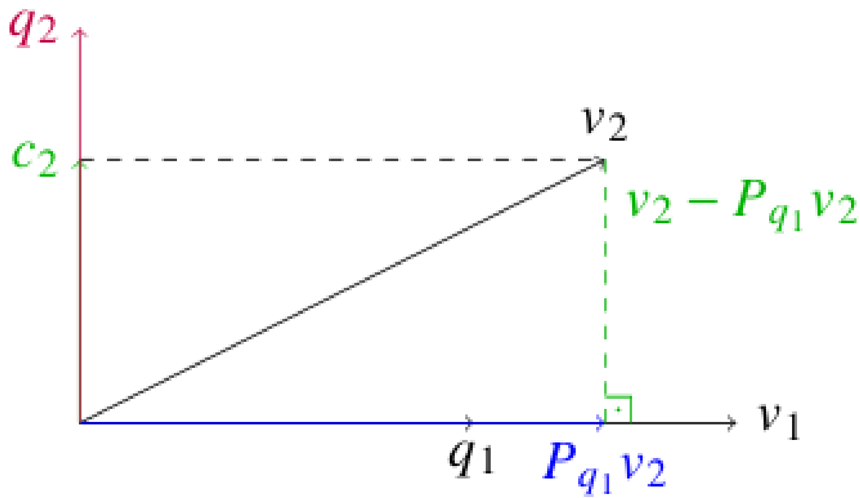
Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme

1.1 Vektoren, Matrizen

1.1.1 2 Dimensionen

Im Zweidimensionalen bestehen Vektoren aus zwei Komponenten, welche in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann.



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Abbildung 1.1: Zweidimensionaler Vektor

Die Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aus Grafik 1.1 sind die Einheitsvektoren und können einen Vektor als Gleichung darstellen. Des Weiteren werden die Einheitsvektoren für die kanonische Basis wichtig sein.

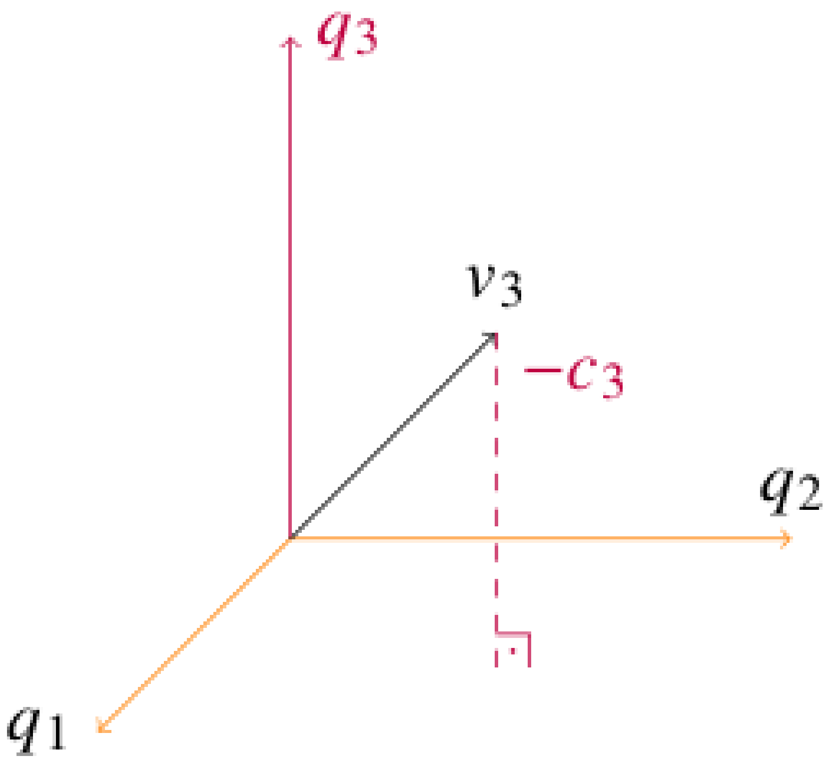
$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2.$$

Unser Beispiel bestand aus reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und befand sich im $\mathbb{R}^2$. Wir können dies jedoch erweitern zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Somit können die Komponenten nun aus Komplexen Zahlen bestehen. Des Weiteren können wir die Dimension erweitern ins Dreidimensionale.

1.1.2 3 Dimensionen

Im Vergleich zum Zweidimensionalen bestehen Vektoren im Dreidimensionalen aus drei Komponenten, welche auch in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann.



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Abbildung 1.2: Dreidimensionaler Vektor

Wie in Grafik 1.1 sind die Vektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ aus Grafik 1.2 Einheitsvektoren, welche dreidimensionale Vektoren als Gleichung darstellen können.

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung:-

Die Gleichungen, welche die Vektoren darstellen, nennt man auch eine lineare Kombination von Vektoren.

1.1.3 Lineare Kombination

Definition 1.1.1: lineare Kombination [Gradinaru, 2024]

Die lineare Kombination von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ist:

$$c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + c_n \vec{v_n}.$$

wobei die $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Skalare in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind.

Die lineare Kombination ist eine Summe von Termen, wobei jeder Term ein gestreckter/gestauchter Vektor (d.h. die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor) ist. [Gradinaru, 2024]

1.1.4 n Dimensionen

Vektoren können natürlich mehr als zwei oder drei Komponenten haben. Wir können es auf n Komponenten erweitern und deshalb auf n Dimensionen. Dies bedeutet, dass wir unser Koordinatensystem auf n Dimensionen erweitern. Somit hat der zugehörige Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Komponenten $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Vektoren in n-dimensionalen Räumen können auch als eine lineare Kombination dargestellt werden.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + ... + x_n \cdot \vec{e_n}.$$

Definition 1.1.2: Standardbasis [Gradinaru, 2024]

Sie Standardbasis (oder auch die kanonische Basis) in diesem n-dimensionalen Koordinatensystem besteht aus den folgenden n Vektoren:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \vec{e_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.1.5 Anwendung der linearen Kombination: Die Superposition von Feldern

Die lineare Kombination wir vor allem bei der Superposition bzw. der Überlagerung von Kräften verwendet. Nehmen wir an, dass 3 Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ gegeben sind.

$$\vec{a_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \vec{a_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \vec{a_3} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Jetzt wollen wir die Skalare herausfinden, welche den resultierenden Vektor $\vec{b}$ durch eine lineare Kombination mit den Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ darstellen.

$$\vec{b} = x_1 \cdot \vec{a_1} + x_2 \cdot \vec{a_2} + x_3 \cdot \vec{a_3} \text{ mit } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Daraus können wir nun ein Gleichungssystem bilden.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Das Gleichungssystem stellen wir nun wie folgt mit Matrizen und Vektoren dar.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ werden nebeneinander in einer Matrix geschrieben. Die Skalare x_1, x_2, x_3 werden als Vektor neben der Matrix geschrieben. Vereinfacht kann man auch $\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ schreiben.

Definition 1.1.3: Lineares Gleichungssystem (LGS) [Gradinaru, 2024]

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) wird kurz geschrieben als:

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

wobei $\vec{A}$ die Koeffizientenmatrix, $\vec{x}$ die Unbekannte und $\vec{b}$ die rechte Seite ist.

Bemerkung:-

Bei der Rechenoperation $\vec{A} \cdot \vec{x}$ handelt es sich um eine Matrix Vektor Multiplikation.

Für lineare Gleichungssysteme gilt:

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{A}^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Die Inverse sowie die Multiplikation von Matrizen wird zu einem späteren Zeitpunkt besprochen.

Wichtig zu erwähnen ist, dass es nicht immer eine Inverse einer Matrix gibt, dies bedeutet aber nicht, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Um herauszufinden ob ein LGS lösbar ist, führen wir die Kompabilitätsbedingung (KB) ein. Dabei gilt folgendes:

- falls $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$, dann gibt es keine Lösung;
- falls $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

Falls $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ gilt, so kann x_3 beliebig gewählt werden.

Kapitel 2

Lineare Räume

Kapitel 3

Lineare Abbildungen

Kapitel 4

Norm und Skalarprodukt in linearen Räumen

Kapitel 5

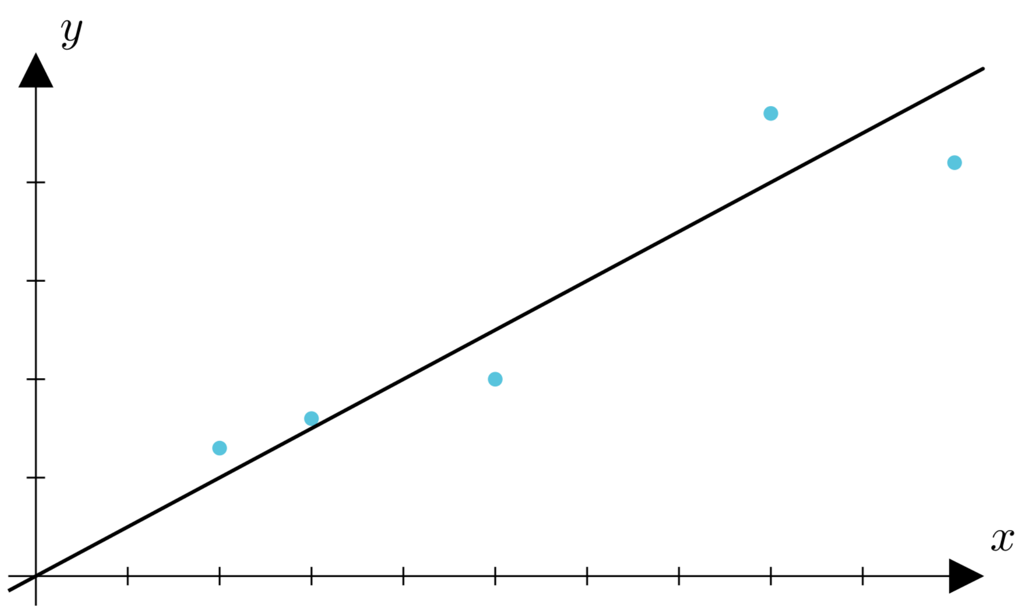
Ausgleichsrechnung

5.1 Ausgleichsrechnung ("Least Sqares")

Nehmen wir an, dass wir eine Datenbank haben mit Messungen, welches wir in einem Graphen eingefügt haben. Nun wollen wir eine Funktion finden, welches durch die Messwerte geht. Wir können das folgende Gleichungssystem bilden:

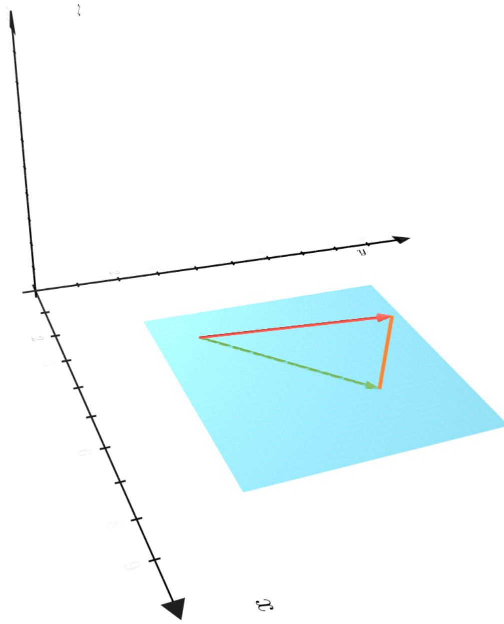
$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{5.1}$$

Wobei die Matrix $\mathbf{A}$ die parameter von $\vec{x}$ sind und $\vec{b}$ die resultierende Gerade bildet.
Wir schauen uns nun die folgende Grafik an:



Wie man anhand der Grafik sehen kann, sieht man, dass es $\vec{x}$ nicht existiert, da es keine Funktion existiert, welche durch alle Punkte geht. Was ist, wenn man trotz allem eine Funktion finden möchte?
Wir nehmen eine neue Betrachtungsweise. Nehmen wir an, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Ebene bildet. Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ bildet dann einen Vector $\vec{b}$ welches in der Ebene ist, die von $\mathbf{A}$ gebildet wird. Nehmen wir an, dass $\vec{b}$ nicht in der Ebene ist. Daraus folgt, dass es kein $\vec{x}$ gibt, welches die Gleichung bildet. Was kann man stattdessen machen?

Man könnte ein $\vec{\hat{x}}$ wählen, welche die Gleichung zwar nicht bildet aber den Vektor $\vec{b}$ annähert. Daraus schliesst man, dass $\vec{\hat{x}}$ $\vec{b}$ am ehesten annähert, wenn die Distanz von b', welches den $\vec{b}'$ in der Ebene bildet und b am geringsten ist.



Anahand der Figur kann man erkennen, dass $\vec{\hat{x}}$ so gewählt werden sollte, dass es die Projektion von $\vec{b}$ bildet. Daraus kann man die folgende Definition ableiten.

Definition 5.1.1: Lineare Ausgleichsrechnung als lineares Gleichungssystem [Gradinaru, 2024]

Sei eine $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\vec{b}$ mit m Einträgen. Gesucht ist ein $\hat{x}$, so dass

$$||\mathbf{A}\vec{\hat{x}} - \vec{b}|| = \min||\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}||.$$

Es gibt zwei wege um $\vec{\hat{x}}$ zu berechnen, nähmlich die Lösung mit der Normalengleichung und Lösung mit der QR-Zerlegung.

5.2 Lösung mit der Normalengleichung

Definition 5.2.1: Normalengleichung [Gradinaru, 2024]

Die Gleichung

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

heisst Normalengleichung.

Mit dieser Funktion kann man ein $\vec{\hat{x}}$ finden, welche den Vektor $\vec{b}$ annähert. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

1. Man multipliziert die Matrix $\mathbf{A}$ mit ihrem Transponierten
2. Man multipliziert den Vector $\vec{b}$ mit $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
3. Man gausst die Matrix $\mathbf{A}$ um nach den Parametern von $\vec{x}$ aufzulösen

Wie man sieht, ist der Nachteil dieser Methode, dass man die Matrix $\mathbf{A}$ gaussen muss. Es gibt aber eine zweite Methode um $\vec{\hat{x}}$ herauszufinden.

5.3 Lösung mit der QR-Zerlegung

Eine einfachere Methode $\vec{\hat{x}}$ zu finden ist mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Definition 5.3.1: Lösung mit der QR-Zerlegung

Sei die QR-Zerlegung einer $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ gegeben, so ist $\vec{\hat{x}}$ durch

$$\mathbf{R}\vec{\hat{x}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\vec{b}$$

definiert.

Dabei geht man wie bei der Normalengleichung vor, jedoch fällt das Gaussen weg, da $\mathbf{R}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Bemerkung:-

Nützliche Videos:

- Least squares approximation | Linear Algebra | Khan Academy (https://www.youtube.com/watch?v=MC7l96tW8V8)
- A=QR Factorizations: Part 4/5 Least Squares (https://www.youtube.com/watch?v=B3_vu5WcBzg)

Kapitel 6

Determinante

6.1 Definition und Eigenschaften

Definition 6.1.1: Determinante [Gradinaru, 2024]

Die Determinante ist eine Funktion

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

D1 $\det \mathbf{I}_n = 1$

D2 det wechselt das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen oder Spalten vertauscht werden (Antisymmetrie).

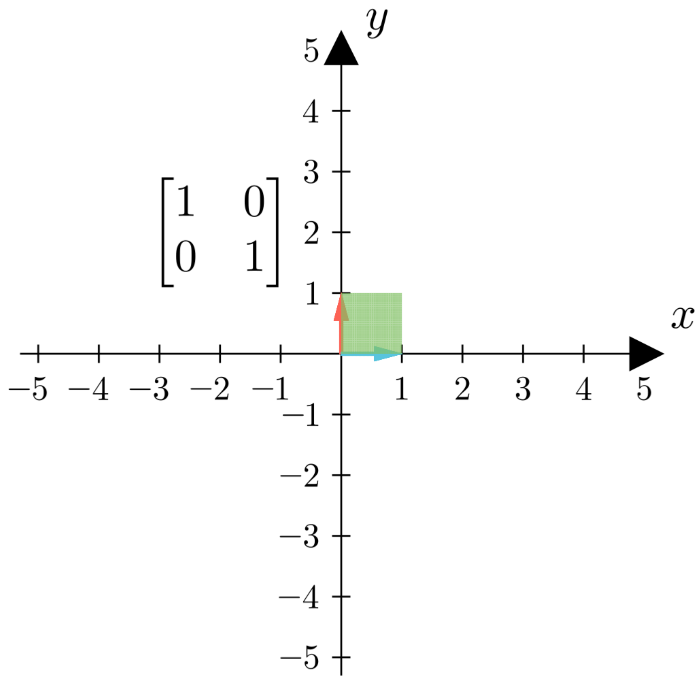
D3 det ist linear in jeder Zeile und Spalte:

$$\det \begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = t \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

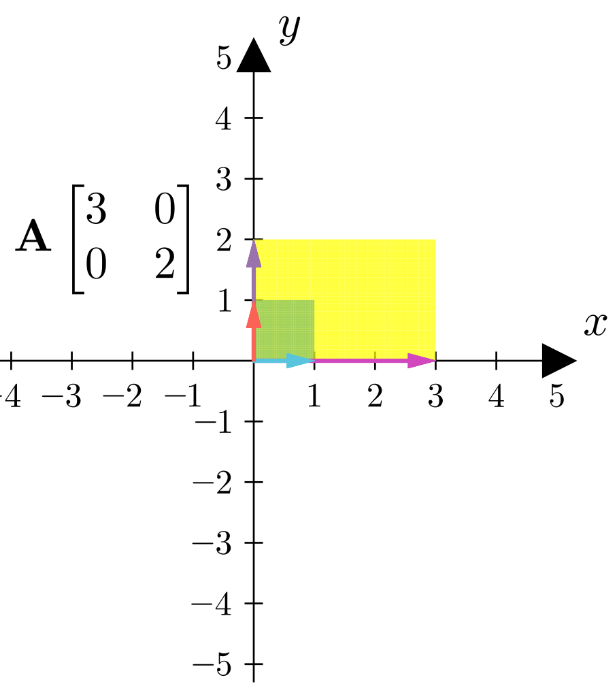
$$\det \begin{bmatrix} a + \tilde{a} & b + \tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Was ist genau die Determinante und was ist der Konzept dahinter?

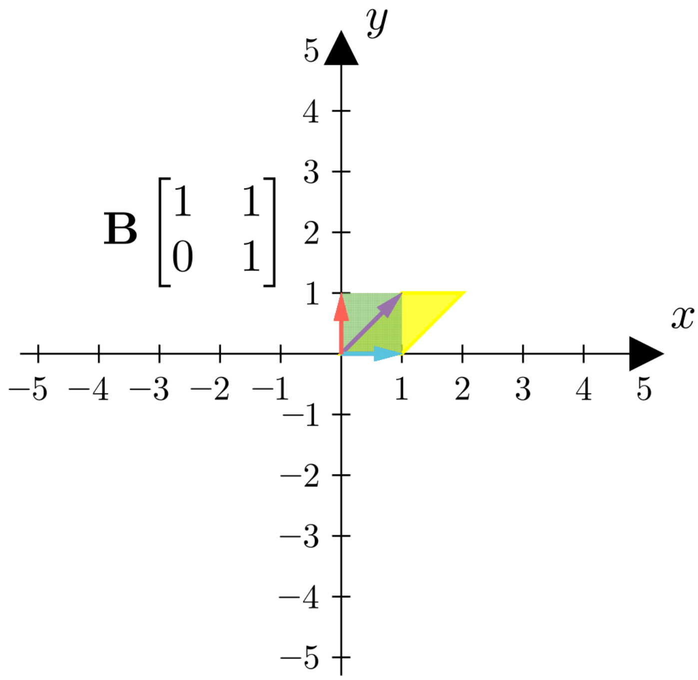
Die Determinante ist ein Hilfsmittel um eine lineare Transformation besser verstehen zu können, genauer um welchen Faktor die Fläche sich vergrössert. Betrachten wir es anhand einer Grafik.
Wir wissen von D1, dass $\det \mathbf{I}_2 = 1$. Versuchen wir mal dies in einer Grafik darzustellen.



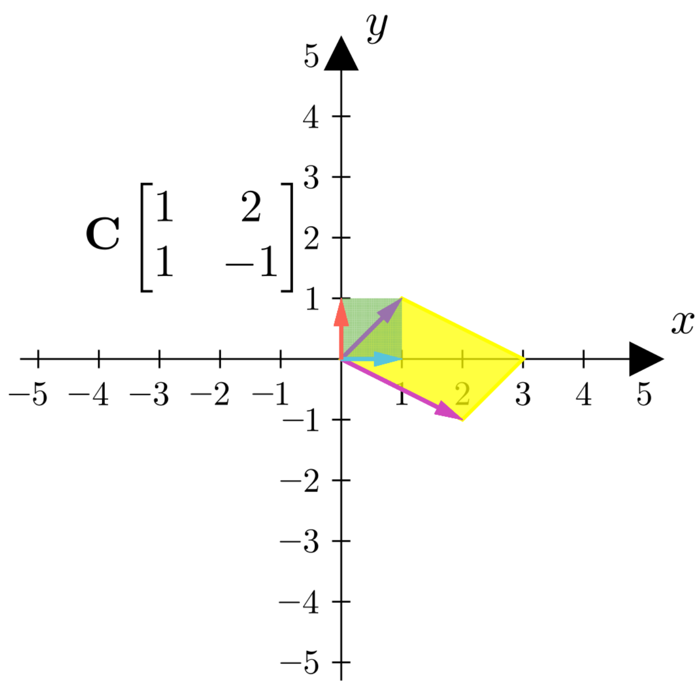
$\mathbf{I}_2$ bildet im Koordinatensystem eine Fläche mit einer Grösse von 1. Wir nehmen nun einfachtshalber mal eine willkürliche Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$. Diese Zeichnen wir auch in das Koordinatensystem ein.



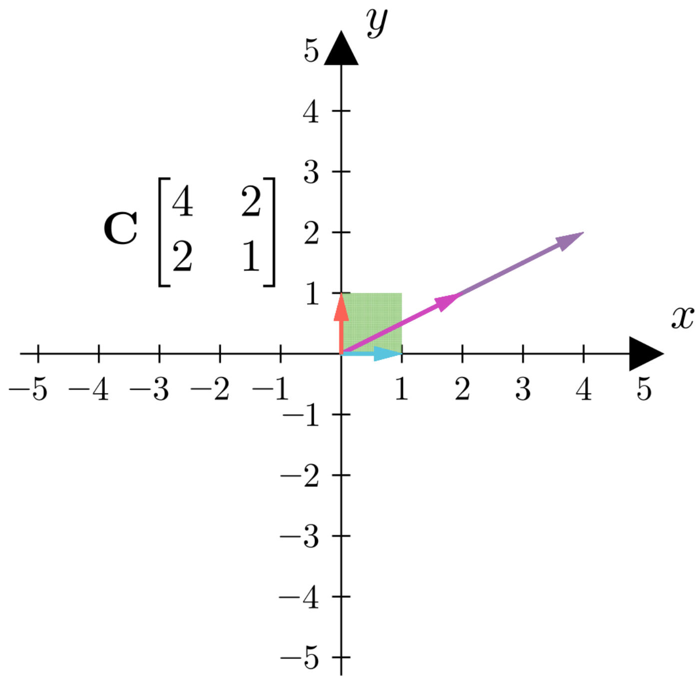
Wir sehen, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Fläche aufspannt mit Grösse 6. Somit ist det 6. Wir nehemen nun eine andere Matrix $\mathbf{B}$.



Wir sehen, dass die Matrix eine lineare Transformation ist, jedoch bleibt die Fläche gleich gross da det 1 ist. Somit würden die Flächen ihre Grösse nach der Transformation nicht verändern.
Was ist mit negativen det. Gibt es negative det und wie soll man sich negative det sich vorstellen?
Wir betrachten neben der $\mathbf{I}_2$ die Matrix $\mathbf{C}$.



Wir sehen, dass die Fläche, welche die Matrix **C** bildet in vergleich zu Matrix **B** gespiegelt ist. Daraus kann man ziehen, dass negative det eine Skalierung und eine Spiegelung sind.
Wie sieht es aus mit det die 0 sind?
Betrachten wir die Matrix **D**.



Die Matrix **D** hat keine Fläche, da die Vektoren, welche die Fläche bilden übereinander sind. In manchen Fällen können Determinanten auch ein Punkt bilden.

Da wir das Konzept von Determinanten jetzt besser verstehen. Können wir mit ein paar wichtige Rechenregel für Determinanten fortfahren. Die Rechenregel sind ausführlich im Skript von Dr. Gradinaru [Gradinaru, 2024] beschrieben.

- Falls zwei Spalten oder Zeilen einer Matrix identisch sind, so ist die Determinante der Matrix 0.
- Lineare Kombinationen von Zeilen der Matrix ändert die Determinante dieser Matrix nicht.
- Wenn eine Matrix eine Nullzeile oder eine Nullspalte hat, so ist ihre Determinante 0.
- Falls **A** eine Dreiecksmatrix ist, so ist die Determinante von A das Produkt der Diagonaleinträge.
- Falls A singulär ist, entsteht bei der Gauss-Elimination eine Nullzeile und die Determinante ist 0.
- $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.
- $$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$
- $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \cdot \det \mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot det \mathbf{A}_{1n}$

Bemerkung:-

Es gibt noch ein paar Tricks um det zu berechnen:

- det einer 3×3 Matrix lässt sich auch so rechnen:

$$\left[\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right]\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

- Die Regel mit der Dreiecksmatrix lässt sich ein wenig erweitern. Falls man Blöcke bilden kann so lässt sich det durch das Multiplizieren der einzelnen det der Blöcke berechnen.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} \cdot \det \boxed{\begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix}}$$

6.2 Anwendungen

Wie vorher erwähnt, wird die Determinante als ein Werkzeug für lineare Transformationen verwendet. Was wir bereits auch angeschaut haben anhand von Beispielen ist, dass det die Fläche ist welche eine 2×2 Matrix aufspannt. Für eine 3×3 Matrix, ist det das Volumen des Körpers, welches von den Vektoren der Matrix gebildet wird.
Neben dem hat det eine Relevanz mit dem Kreuzprodukt:

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{w}| = |\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}|.$$

Bemerkung:-

Nützliche Videos:

- The determinant | Chapter 6, Essence of linear algebra https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk

Kapitel 7

Eigenwertproblem

Kapitel 8

Singulärwertzerlegung

Literaturverzeichnis

[Gradinaru, 2024] Gradinaru, D. V. (2024). Lineare Algebra.

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.