Analysis I

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis I (HS24) von F. Ziltener und dem Skript Änalysis für Informatik"von Michael Struwe.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Teil I

Analysis I

Kapitel 1

Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

1.1 Logik

1.1.1 Grundlagen

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. [Ziltner, 2024] (Wahr oder Falsch).

In der mathematischen Logik gelten die folgenden Sätze.

- **Satz vom ausgeschlossenen Wiederspruch:** Eine Aussage ist nicht sowohl war als auch falsch.
- **Satz vom ausgeschlossenen Dritten:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

[Ziltner, 2024]

Bemerkung:-

Es gibt gewisse Aussagen, als logische Aussage gelten könnte aber nicht zulässig ist. Solche Aussagen sind meisten rückbezügliche Äusserungen und sind deswegen keine sinnvollen Aussagen. (Siehe Lügner-Paradox)

Aussagen können verneint und miteinander verknüpft werden.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
T	wahr	
F	falsch	
$\neg A$	nicht A	Negation

Für Verknüpfungen verwenden wir folgende Notationen.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	inklusive Disjunktion
$A \dot{\vee} B$	entweder A oder B	exklusive Disjunktion
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	genau dann A, wenn B	Äquivalenz

Die Wahrheitstabelle der vorher erwähnten Verknüpfungen sind wie folgt.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

Aus der Tabelle kann man die Zusammenhänge der Verknüpfungen erkennen.

Bemerkung:-

Wir unterscheiden zwischen dem inklusiven Oder und dem exklusiven Oder. Beim inklusiven Oder können beide Aussagen warh sein während beim exklusiven oder nur einer der beiden Aussagen wahr sein kann.

Bemerkung:-

Verknüpfende Aussagen brauchen inhaltlich nicht zusammenzuhängen.

1.1.2 Äquivalenz

Theorie 1.1.1 Äquivalenz

Seien P und Q Aussagen. Wenn P und Q die gleichen Aussagen haben, so nennen wir sie logisch Äquivalent.

$$P \equiv Q \tag{1.1}$$

Sobald 2 Aussagen äquivalent sind, so ist ihre Implikation, sowie ihr Kontraponiertes logisch äquivalent.

Theorie 1.1.2 Kontraponiertes

Das Kontraponierte zur Implikation $A \Rightarrow B$ ist

$$\neg B \Rightarrow \neg A \tag{1.2}$$

Dabei gilt

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist nur wahr, wenn die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind.

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A).$$

1.1.3 Axiome, Sätze und Beweise

In der Mathematik sind Axiome von grosser Bedeutung. Sie sind das Fundament der Mathematik. In der Analysis werden wir jedoch Sätze verwenden, welche durch Axiome bewiesen worden sind.

Um Aussagen zu Beweisen, verwenden wir in der Logik den Modus Ponens.

Definition 1.1.1: Modus Ponens

Ein Beweis einer Aussage A ist eine sukzessive Herleitung von A aus dem Axiomen, in der logische Schlussregeln angewendet werden. Eine solche Regel ist der Modus Ponens.

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{\text{B}}$$

A ist die Prämise, B die Konklusion.

Aus dem Modus Ponens können wir schliessen, dass wenn A und $A \Rightarrow B$ gilt, so gilt B. Der Modus Ponens ist die Basis eines Beweises. Wir werden später sehen, dass wir den Modus Ponens im Hintergrund verwenden.

Bemerkung:-

Wir können auch Beweise durchführen durch die Kontraposition.

In der Analysis werden wir auch mit indirekten Beweisen arbeiten. Dabei nehmen wir an, dass eine Aussage falsch ist, woraus wir eine falsche Aussage herleiten. Dies nennen wir auch den Beweis mittels Widerspruch. Es lohnt sich aber oft, einen Widerspruchsbeweis als direkten Beweis umzuschreiben, da aus eine falsche oder einer wahren Aussage eine beliebige wahre Aussage hergeleitet werden kann.

Theorie 1.1.3 Prinzip der vollständigen Induktion

Nehmen wir an das die Funktion $P(0)$ gilt. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Kapitel 2

Zahlen und Vektoren

Kapitel 3

Folgen und Reihen

Kapitel 4

Stetigkeit, Topologie

Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $x_0, f(x_0)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0)$ und $(x, f(x))$ für x gegen x_0. Ableitungen sind allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

5.1 Differential und Differentiationsregeln

Bemerkung:-

$$dx \text{ und } dy \text{ sind Differentialen. } \Rightarrow f'(x_0) = \frac{dy}{dx}, dx \text{ nennt man Differentialquotient..}$$

Bemerkung:-

Je kleiner Δx ist, desto näher kommt es an den Wert von Δy für:

$$\Delta y \equiv f'(x_0)\Delta x.$$

Beispiel 5.1.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2, f'(x_0 = 0) = 0.$$

Bemerkung:-

Die Menge U ist offen, da f stetig ist. Dies folgt aus dem Fakt, da das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist $\forall V$ offen.

5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

Bemerkung:-

Für

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

gilt, dass a die Steigung der Sekante ist.

Bemerkung:-

$\Rightarrow$ Die Funktion hat genau eine Lösung, die auch nach $f(0) = y_0$ erfüllt, mit $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, nämlich $f(x) = ye^{cx}$.

Beispiel 5.2.1

$$\frac{x^n}{e^{(x^n)}}?.$$

$$\frac{n \cdot x^{n-1}}{e^{(x^n)}} = \frac{e^x - 1}{x} = \exp(0) = 1.$$

Kapitel 6

Integration

Teil II

Analysis II

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

Kapitel 8

Topologie, Stetigkeit

Kapitel 9

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Kapitel 10

Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

Kapitel 11

Mehrdimensionale Riemann-integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

Kapitel 12

Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss

Literaturverzeichnis

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.

[Ziltner, 2024] Ziltner, Prof. Dr., F. (2024). Notizen zur Vorlesung Analysis 1 für ITET und RW, Herbstsemester 2024.