Technische Mechanik

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Technische Mechanik (HS24) von Prof. Dr. P. Tiso, dem Skript Technische Mechanik von Prof. Dr. S. Kaufmann, sowie dem PVK Skrip von L. de Windt.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Falls nicht anders deklariert wurden alle Grafiken eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Kapitel 1

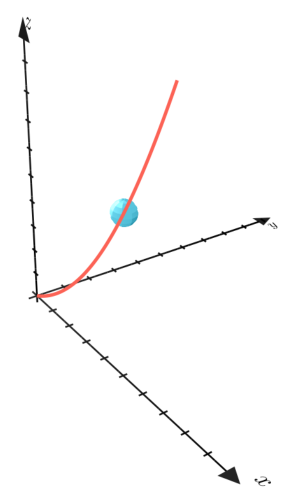
Kinematik

1.1 Ortsfunktion eines materiellen Punktes

Definition 1.1.1: Ortsfunktion

Eine Ortsfunktion beschreibt die Position eines materiellen Punktes in Abhängigkeit mit der Zeit in einem Raum. Wir unterscheiden zwischen drei verschiedenen Koordinaten Systemen.

- Karthesische Koordinaten
- Zylindrische Koordinaten
- Polar Koordinaten



Der Ortsfunktion wird als Vektor dargestellt. Die Komponenten des Ortsvektors beschreiben die Position im Raum.

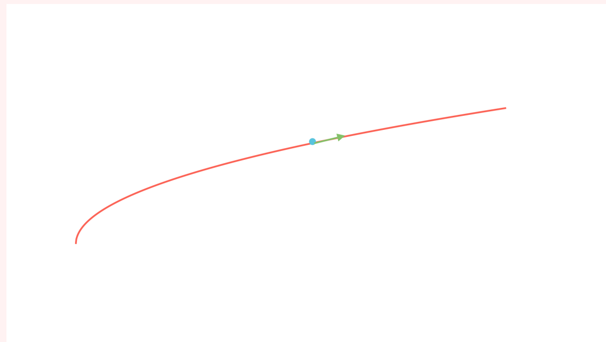
$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

1.2 Geschwindigkeit

Definition 1.2.1: Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, welcher die Richtung sowie die Geschwindigkeit des Punktes beschreibt, mit welcher der Punkt die Bahnkurve durchläuft. Sie kann berechnet werden durch die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion und verläuft immer tangential zur Bahnkurve.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t).$$



Die Ableitung der Ortsfunktion geschieht komponentenweise.

2D

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y.$$

3D

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}y \\ \frac{d}{dt}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z.$$

1.3 Schnelligkeit

Die Schnelligkeit ist der Betrag des Geschwindigkeit Vektors. Sie kann wie folgt berechnet werden.

2D

$$v = |v(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

3D

$$v = |v(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

1.4 Übersicht

In Kapitel 1.1 gesehen, dass die Ortsfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen berschrieben werden können. In der folgenden Tablle werden die Ortsfunktion, die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit in Abhängigkeit von der Ortsfunktion in den verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben.

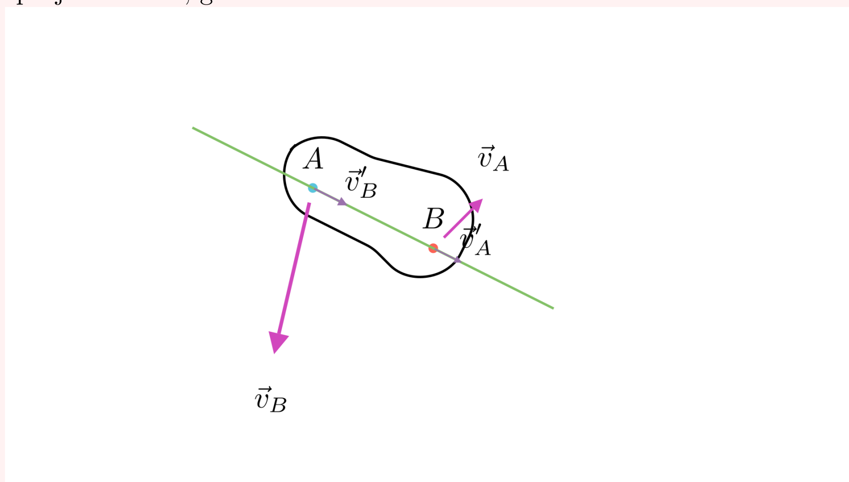
KS	Ortsfunktion	Geschwindigkeit	Schnelligkeit
Kartesisch	$x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$	$\dot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$	$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$
Zylindrisch	$\rho(t) \cdot \vec{e}_\rho(t) + z \cdot \vec{e}_z$	$\dot{\rho}(t) \cdot \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \vec{e}_\varphi(t) + \dot{z} \cdot \vec{e}_z(t)$	$\sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$
Polar	$\rho(t) \cdot \vec{e}_\rho(t)$	$\dot{\rho}(t) \cdot \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \vec{e}_\varphi(t)$	$\sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2}$

1.5 Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Definition 1.5.1: Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Der Satz der projizierten Geschwindigkeit besagt, dass die Geschwindigkeiten von 2 Punkten, welche auf die Verbindungslinie der Punkte projiziert wird, gleich sind.

$$\vec{v}_A' = \vec{v}_B' \tag{1.1}$$



Aus Gleichung 1.1 lässt sich die Formel unformen zu eine weiteren essentiellen Gleichung umformen.

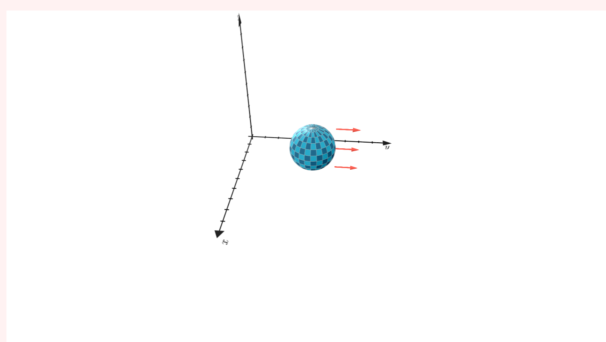
$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0 \tag{1.2}$$

1.6 Ebene Bewegungen

Definition 1.6.1: Ebene Bewegung

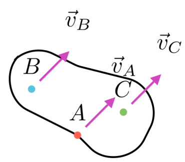
Als ebene Bewegung bezeichnet man ein Körper, welches nur in unserem Fall in der xy-Ebene sich bewegt. Deswegen gilt die folgende Beziehung.

$$\begin{cases} v_z = 0 \\ v_x = v_x(x,y) \text{ und } v_y = v_y(x,y) \end{cases}.$$



Für starre Körper unterscheiden wir zwischen zwei verschiedene ebene Bewegungen.

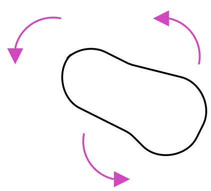
Translation



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \tag{1.3}$$

$\Rightarrow$ Alle Punkte, welche innerhalb des Starrkörpers sind haben die gleiche Geschwindigkeit.

Rotation



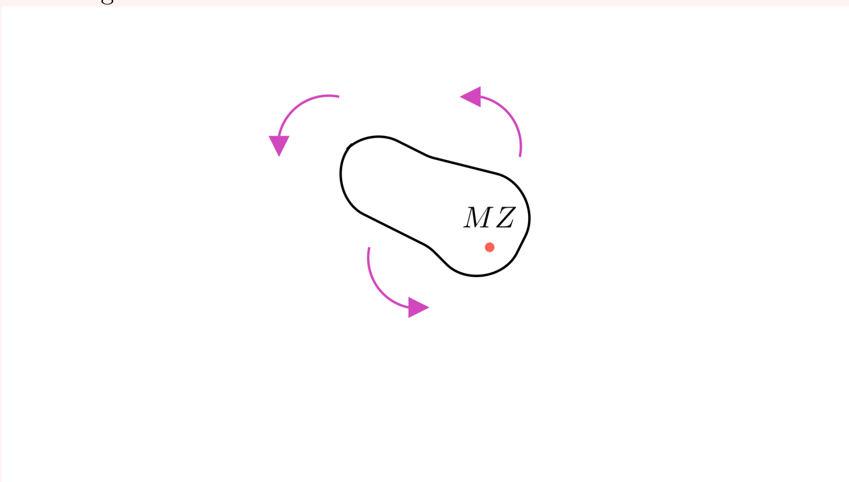
$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP} \tag{1.4}$$

1.7 Satz vom Momentanzentrum

In Kapitel 1.6 haben wir einen wichtigen Satz in der Technischen Mechanik kennengelernt. Dabei haben wir zwischen Translation und Rotation geredet. Dabei kam die Gleichung 1.4 ins Spiel. Wir werden nun diese Gleichung genauer betrachten.
Bevor wir weiterfahren klären wir zuerst, was das Momentanzentrum ist.

Definition 1.7.1: Momentanzentrum

Das Momentanzentrum ist der Punkt eines Starkörpers, welcher momentan in Ruhe ist d.h. keine Geschwindigkeit besitzt.

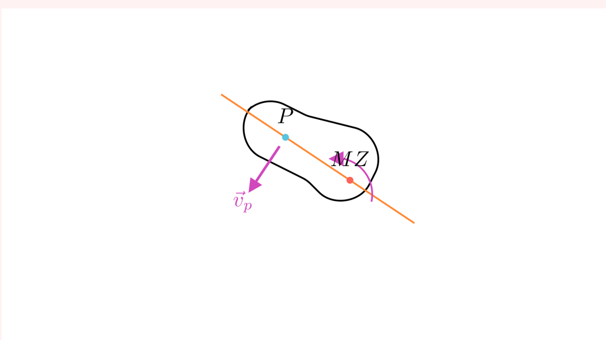


$$\vec{v}_{MZ} = 0.$$

Bemerkung:-

Ein Punkt, der den Boden oder die Wand berührt, ist ein Momentanzentrum. Im Dreidimensionalen ist das Momentanzentrum eine Kontaktlinie.

Definition 1.7.2: Satz vom Momentanzentrum



$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p.$$

Die Formel besagt, dass die Geschwindigkeit bei einer Rotation an einem Punkt durch das Kreuzprodukt der Rotationsgeschwindigkeit und dem Vektor vom Momentanzentrum zum Punkt bestimmt werden kann.

Bemerkung:-

Das Kreuzprodukt darf nicht vertauscht werden.

Aufgrund des Kreuzproduktes und SdpG sind die Geschwindigkeitsvektoren immer senkrecht zum Verbindungsvektor zwischen dem Momentanzentrum und dem Punkt.

Die Rotationsschnelligkeit kann durch den Betrag der Rotationsgeschwindigkeit berechnet werden (Kapitel 1.3) oder durch die zeitliche Ableitung des Rotationswinkels Θ. ($\omega = \dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$)
Die Schnelligkeit eines Punktes kann durch die Multiplikation der Winkelschnelligkeit und der Distanz vom Momentanzentrum zum Punkt. ($v_p = \omega \cdot r_p$)

Bemerkung:-

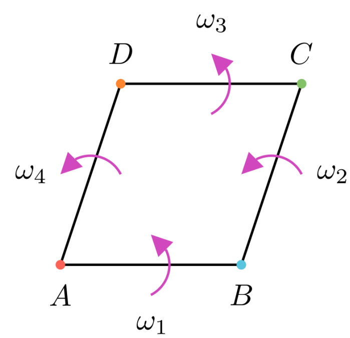
Es hat immer nur ein ω pro Starrkörper.

1.7.1 Die Parallelogrammregel

Definition 1.7.3: Parallelogrammregel

Wenn Starrkörper ein Parallelogramm bilden, so haben die parallel stehenden Starrkörper dieselbe Winkelgeschwindigkeit.

$\omega_1 = \omega_3$ und $\omega_2 = \omega_4$.

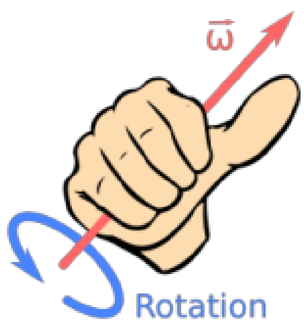


Bemerkung:-

Die Vorzeichen der x und y Komponente des Geschwindigkeitsvektors kann man entweder grafisch oder über das Kreuzprodukt bestimmen.

1.7.2 Winkelgeschwindigkeit ω

ω kann durch die rechte Hand bestimmt werden. Dies folgt aus dem Fakt, dass $\vec{\omega}$ nur eine z Komponente besitzt.



Die ursprüngliche Richtung von ω kann selbst bestimmt werden. Diese Richtung bestimmt imnachhinein die Richtung von $\vec{\omega}$.

1.8 Freiheitsgrad und Bindung

Definition 1.8.1: Freiheitsgrad

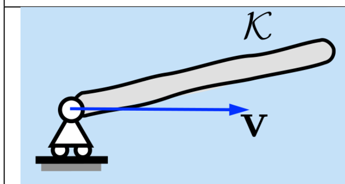
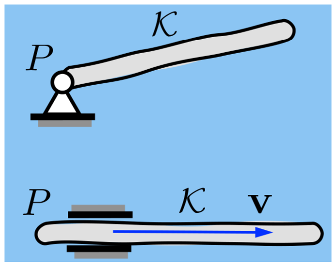
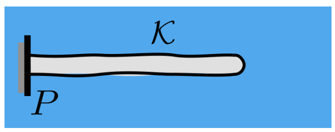
Unter den Freiheitsgrad versteht man die minimale Anzahl an Koordinaten, welche benötigt werden um die Lage eines Systems bestimmen zu können. [Tiso, 2024] Dabei gilt die folgende Formel.

$$f = n - b \tag{1.5}$$

f ist der Freiheitsgrad, n der Freiheitsgrad des ungebundenen Systems und b die Anzahl unabhängiger Bindungen.

Im zweidimensionalen hat ein Starkörper immer den Freiheitsgrad 3. Im dreidimensionalen hat ein Starkörper

den Freiheitsgrad 6.
Für die Bindungen kann die folgende Tabelle betrachtet werden.

	Name	Bindung
	Auflager	1
	Gelenk oder Slider	2
	Einspannung	3

Für Gelenke, welche Starkörper verbindet kann die folgende Formel verwendet werden.

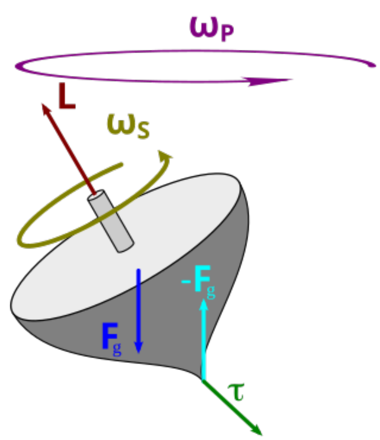
$$b = (\text{Anzahl Starkörper am Gelenk} - 1) \cdot 2 \tag{1.6}$$

1.9 Räumliche Bewegungen

In diesem Kapitel werden wir die ebene Bewegung (Kapitel 1.6) erweitern zur räumlichen Bewegung. Die räumliche Bewegung ist, in Vergleich zur ebenen Bewegung die Bewegung eines Starrkörpers in dreidimensionalen Raum. Eine solche Bewegung ist die Kreiselung.

Kreiselung

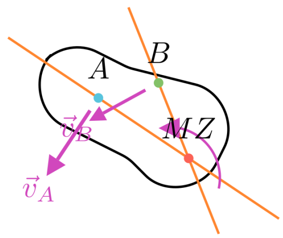
Eine Kreiselung unterscheidet sich von der Rotation dadurch, dass $\vec{\omega}$ sich auch "rotiert". Betrachten wir jedoch den momentanen Zustand, so ist eine Kreiselung nichts anderes als eine Rotation und somit gilt der Satz vom Momentanzentrum. Die Rotation von $\vec{\omega}$ darf aber natürlich nicht ignoriert werden, weshalb eine neue Formel eingeführt wird, welche für allmögliche Bewegungen von Starrkörpern gilt.



1.10 Starrkörperformel

Definition 1.10.1: Starrkörperformel (ABBA-Formel)

Die Starrkörperformel beschreibt die Bewegung von Starrkörper im allgemeinen Fall. Dabei gilt die folgende Formel.



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} \tag{1.7}$$

Aus der Gleichung 1.7 lassen sich die Gleichungen der Ebenen Bewegungen herleiten.

Wenn $\vec{\omega} = 0$, dann gilt:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

Wenn $\vec{v}_B$ das Momentanzentrum ist d.h. $\vec{v}_B = 0$, dann gilt:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}.$$

Man sieht, dass die Bewegung eines Starrkörpers durch zwei Vektoren eindeutig bestimmt werden kann.

1.11 Die Kinemate

Wir haben in Kapitel 1.10 gelernt, dass die Bewegung eines Starrkörpers durch zwei Vektoren eindeutig bestimmt werden kann. Dies wird bei den Kinematen eine wichtige Rolle spielen, denn die Kinematen beschreiben die Bewegung eines Starrkörpers.

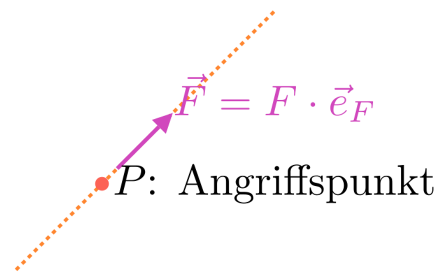
Die Kinemate ist bestimmt durch zwei Invarianten. $I_1 = \vec{\omega}$ und $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P$.

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$	Translation oder Stillstand	-
$I_1 \neq 0$	Rotation	Kreiselung

1.12 Kraft

Definition 1.12.1: Kraft

Die Kraft ist eine physikalische Grösse, welche eine Einwirkung auf einen Körper hat. Die Kraft hat einen Betrag, eine Richtung, sowie ein Angriffspunkt.

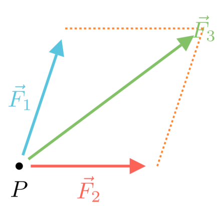


Bemerkung:-

Die Kraft kann entlang der Wirkungslinie verschoben werden ohne dabei ihre Wirkung zu verlieren.

Bemerkung:-

Man unterscheidet zwischen innere und äussere Kräfte. Äussere Kräfte sind Kräfte, welche von aussen auf den Starkörber Wirken, während innere Kräfte innerhalb des Starkörpers wirken.



Falls die Kräft den gleichen Angriffspunkt haben, so können die Kräft vektoriell addiert werden.

Bemerkung:-

Negative Kräft haben entweder einen negativen Betrag oder zeigen in die entgegengesetzte Richtung.

1.12.1 Resultierende Kraft

Die resultierende Kraft eines Starrkörpers kann durch die Summe aller Kräfte berechnet werden.

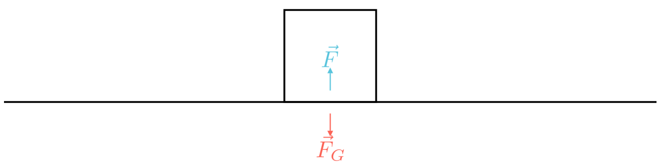
$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \tag{1.8}$$

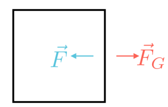
Bemerkung:-

Die Addition von Kraftvektoren geschieht komponentenweise.

1.13 Reaktionsprinzip

Wenn Kräfte auf ein Körper wirken so gibt es immer eine entgegengesetzte Kraft. Dieses Phänomen wird Reaktionsprinzip genannt. Würde es dieses Prinzip nicht geben, würde der Körper sich dofomieren oder ein Körper sich durch den Boden bewegen.





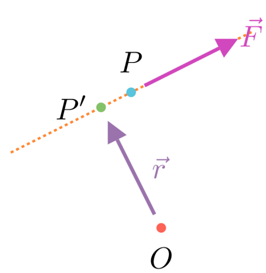
1.14 Moment

Definition 1.14.1: Moment

Eine Kraft, welche ein Starrkörper zum rotieren bringt wird als Moment bezeichnet. Im Vergleich zum Satz vom Momentanzentrum kann das Moment von irgendeinem Punkt innerhalb des Starrkörpers berechnet werden. Das Moment kann durch die folgende Formel berechnet werden.

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i \tag{1.9}$$

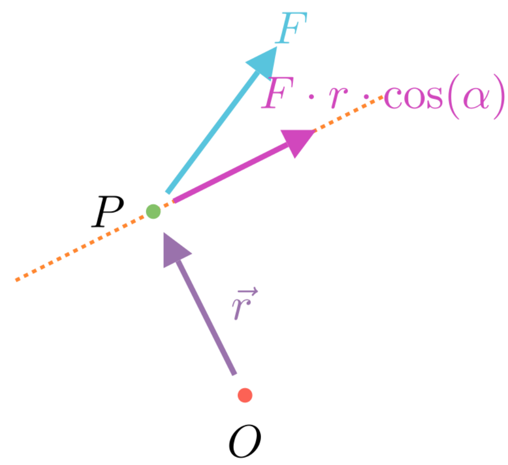
Der Betrag vom Moment kann durch das verschieben der Kraft entlang der Wirkungslinie berechnet werden. Dazu berschiebt man die Kraft, bis sie orthogonal zu $\vec{r}$ ist. Daraus folgt



$$M_A = r_{AP'} \cdot F \tag{1.10}$$

Bemerkung:-

Für das Vorzeichen von $\vec{M}$ kann man vorgehen wie bei $\vec{\omega}$. (Kapitel 1.7.2)



Für Momente in zweidimensionalen Räumen gilt, dass sie nur eine Komponente haben. Diese ist immer senkrecht auf $\vec{r}$. Aus diesem Grund kann der Betrag vom Moment wie folgt berechnet werden.

$$M_A = r \cdot F_A \cdot \cos(\alpha).$$

Im Fall vom zweidimensionalen Raum wäre der berechnete Betrag die z Komponente.

$$\vec{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot F \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1.14.1 Das resultierende Moment

Das resultierende Moment beschreibt alle Momente die auf einem Punkt wirken. Diese kann durch die Addition von allen Momenten, welche auf ein Punkt wirken berechnet werden.

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum \vec{M}_A \tag{1.11}$$

1.15 Transformationsregel

Die Transformationsregel kann durch eine Gleichung das Moment an einem anderen Punkt beschreiben.

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{R} \tag{1.12}$$

Wenn das Moment, sowie die Resultierende Kraft eines Punktes bekannt ist, so kann man die soeben genannte Formel anwenden.

Bemerkung:-

Wenn $\vec{R} = 0$ so sind die Momente in beiden Punkten gleich.

Bemerkung:-

Wenn die Wirkungslinie von $\vec{R}$ durch den Bezugspunkt geht, dann ist das Moment 0.

1.16 Leistung

Die Leistung beschreibt die Kraft, welche aufgewendet wurde in einer bestimmten Zeitspanne. Es gilt die folgende Formel.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q \tag{1.13}$$

1.16.1 Gesamtleistung

Für die Gesamtleistung gilt die folgende Gleichung.

$$P_{tot} = \sum P_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_Q + \sum \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i \tag{1.14}$$

Bemerkung:-

Wenn es sisch um eine Rotation handelt, dann fällt die Summe mit den Kräften weg.

Bemerkung:-

Falls alle Kräfte nur auf einem Starrkörper angreifen, dann gilt die folgende Formel.

$$P_{tot} = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega} \tag{1.15}$$

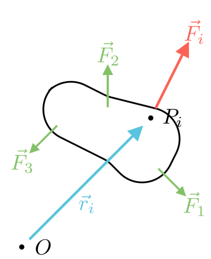
1.17 Die Dyname

Die Dyname hat eine Ähnlichkeit wie die Kinemate. (Kapitel 1.11) Die Dyname beschreibt die Bewegung eines Starrkörpers anhand der Resultierende Kraft und dem Moment. Wie bei der Kinemate gibt es zwei Invarianten. $I_1 = \vec{R}$ und $I_2 = \vec{M}_P \cdot \vec{\omega}$.

1.18 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

Definition 1.18.1: Kräftegruppe

Eine Kräftegruppe ist eine Sammlung an Kräften, welche an einem Starrkörper wirken.



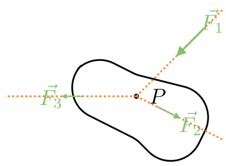
$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N\} \tag{1.16}$$

Bemerkung:-

Um die resultierende Kraft an einem Punkt P_i zu bestimmen, wären sehr rechenaufwendige Prozesse nötig, welche mit grosser Wahrscheinlichkeit hier nicht besprochen wurden.

Definition 1.18.2: Zentrale Kräftegruppe

Wenn alle Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen, so kann der Punkt als Angriffspunkt gesehen werden. In Kapitel 1.12 haben wir gelernt, dass eine Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden kann, weshalb die Kräfte auf einen Punkt wirken. Aus diesem Grund kann die resultierende Kraft $\vec{R}$ sehr einfach berechnet werden.

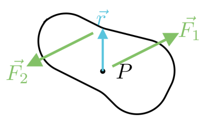


$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq 0.$$

$$\vec{M}_p = \vec{0}.$$

Definition 1.18.3: Kräftepaar

Bei einem Kräftepaar haben die zwei Kräfte den gleichen Betrag aber die entgegengesetzte Richtung. Ihre Wirkungslinie müssen sich nicht schneiden.



$$\vec{R} = 0.$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |F|.$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}.$$

Definition 1.18.4: Nullsystem

Ein Nullsystem bezeichnet ein Starrkörper oder eine Kräftegruppe, welche im Gleichgewicht ist. Dies setzt die folgenden Bedingungen vorraus.

$$\vec{R} = \vec{0}.$$

$$\vec{M}_0^{tot} = \vec{0}.$$

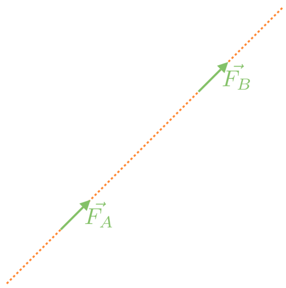
Definition 1.18.5: Statische Äquivalenz

Statische Äquivalenz bezeichnet zwei Kräftegruppen, deren Gesamtleistung gleich ist.

$$P(\{\vec{F}_i\}) = P(\{\vec{G}_i\}).$$

Dies bedeutet, dass wenn zwei Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die gleiche Dyname haben, sind sie statisch äquivalent. [de Windt, 2023]

Wenn wir die Statische Äquivalenz von zwei Kräften betrachten, so muss folgendes gelten.



$\vec{F_A}$ und $\vec{F_B}$ sind statisch äquivalent.

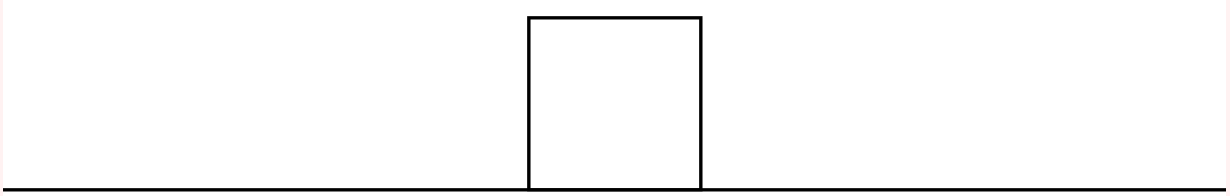
Kapitel 2

Statik

2.1 Ruhe und Ruhelage

Definition 2.1.1: Ruhe

Wenn alle Geschwindigkeiten eines Systems 0 sind so befindet sich das System in Ruhe.



Definition 2.1.2: Ruhelage

Die Ruhelage ist ein Zustand eines Systems, in dem keine Änderung mehr durchgemacht werden.

2.2 Statische und kinematische (Un-)bestimmtheit

Definition 2.2.1: Statische und kinematische Bestimmtheit

Die statische / kinematische Bestimmtheit kann das mechanische / kinematische Gleichgewicht eines Systems prüfen. Dazu wird der Freiheitsgrad verwendet.
Wenn $f = 0$, dann ist das System statisch bestimmt und ein Gleichgewicht ist möglich.
Wenn $f < 0$, dann ist das System statisch unbestimmt und die Bindungskräfte können nicht durch die Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden.
Wenn $f > 0$, dann ist das System statisch und kinematisch unbestimmt und das Gleichgewicht ist nur für spezielle Belastungsfälle möglich.
[Tiso, 2024]

2.3 Hauptsatz der Statik

Definition 2.3.1: Hauptsatz der Statik

Der Hauptsatz der Statik besagt, dass in einer Ruhelage eines Starkörpers müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein. [Tiso, 2024] Deshalb gilt

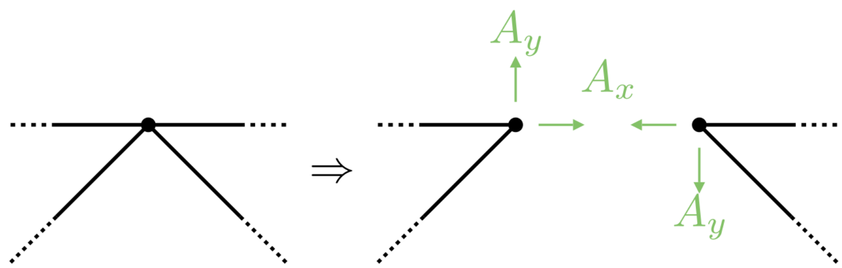
$$\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_0 = \vec{0}.$$

Bemerkung:-

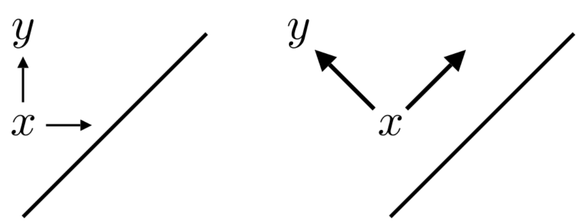
Wenn der Hauptsatz der Statik bei einem Starkörper gilt, so ist der Starkörper in Ruhelage. Dies gilt nicht für Systeme. Wenn der Hauptsatz der Statik gilt, muss dies nicht umbeding bedeuten, dass das System un Ruhelage ist.

2.4 Freischneiden

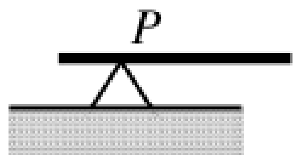
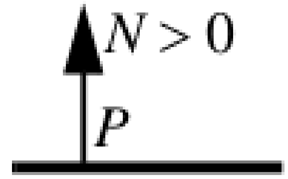
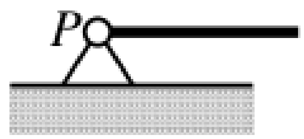
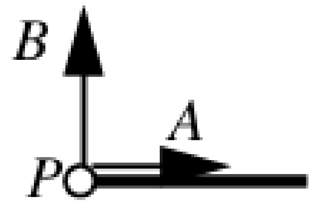
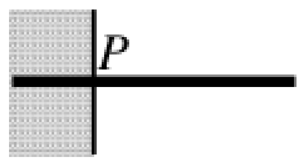
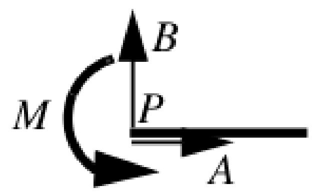
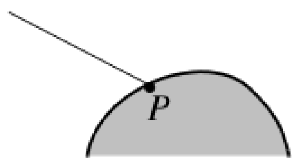
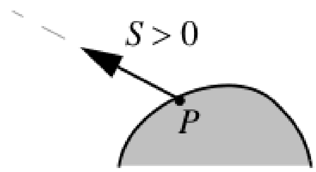
Für die Analyse von Systemen ist es sinnvoll, den Starrkörper freizuschneiden. Dazu werden am Starrkörper alle äusseren Kräfte eingezeichnet, welche auf den Starrkörper wirken.
Beim Freischneiden können auch der Starrkörper selbst in einzelne Starrkörper geschnitten werden. Hier ist es einfach wichtig, dass man die Gegenkräfte einzeichnet.



Des weiteren kann für jeden Starrkörper ein beliebiges Koordinatensystem gewählt werden.



2.4.1 Lager- und Bindungskräfte

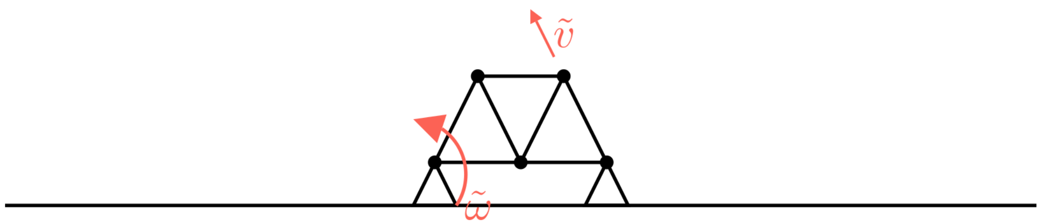
	Lager vor dem Freischnitt	nach dem Freischnitt
Auflager (einseitig)		
Gelenk Festlager		
Einspannung		
Faden / Seil		

[Kaufmann, 2017]

2.5 Virtueller Bewegungszustand

Definition 2.5.1: Virtueller Bewegungszustand

Ein virtueller Bewegungszustand ist ein gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu den wirlich möglichen Bewegungszuständen haben muss. [de Windt, 2023]



Um virtuelle Bewegungszustände von "normalen" Bewegungszustände unterscheiden zu können, markiert man virtuelle Bewegungszustände mit einem Tilde. ($\tilde{v}$)

Wir unterscheiden zwischen 2 verschiedenen virtuellen Bewegungszuständen.

Zulässiger Bewegungszustand

Bei einem zulässigen Bewegungszustand werden keine Bindungen verletzt.

Unzulässiger Bewegungszustand

Bei einem unzulässigen Bewegungszustand werden mindestens eine Bindung verletzt.

Bemerkung:-

Wir werden uns vor allem mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen.

2.6 Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

Definition 2.6.1: Prinzip der virtuellen Leitungen

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen). [Kaufmann, 2017]

$$\tilde{P} = \tilde{P}^{(i)} + \tilde{P}^{(a)} = 0 \tag{2.1}$$

Das Prinzip der virtuellen Leistungen stellt sicher, dass das vorliegende System die für die Ruhe nötigen Kräfte tatsächlich aufnehmen kann. [de Windt, 2023]

Bemerkung:-

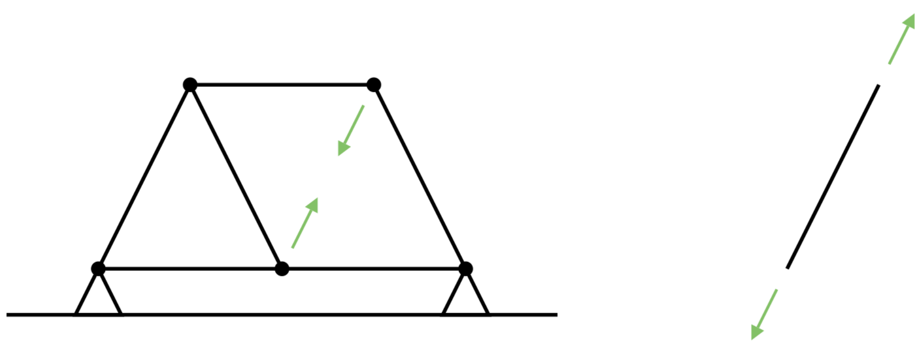
Das Prinzip der virtuellen Leistungen ermöglicht uns Stabkräfte zu bestimmen.

2.6.1 PdvL vs HS

Wir wissen von Kapitel 2.3, dass wenn der Hauptsatz der Statik gilt, dass der Körper in Ruhe ist. Dies gilt aber nicht für ein System.
Beim PdvL gilt, wenn das Prinzip der virtuellen Leitungen gilt, so ist der Starrkörper oder das System in Ruhe. Zusätzlich gilt auch, wenn das Prinzip der virtuellen Leistungen gilt, so gilt auch der Hauptsatz der Statik.

2.7 Stabkräfte

Bei den Stabkräften beschäftigen wir uns hauptsächlich mit Pendelstäben. Diese sind an den Enden gelenkig gelagert und können nur Kräfte aufnehmen, deren Wirkungslinie mit dem Pendelstab verläuft. Das heisst, dass der Stab nur Zug- und Druckkräfte aufnehmen kann. Externe Kräfte wirken nur auf den Gelenken.
Wenn wir ein Fachwerk anschauen und die Kräfte einzeichnen, welche durch den Pendelstab auf das Fachwerk wirkt, so sind sie immer entgegengesetzt zu den Stabkräften, welche auf den Pendelstab wirken.



Anhand der vorherigen Grafik kann man sehen, dass die Stabkräfte an den Gelenken des Pendelstabes immer entgegengesetzt sind. Dies gilt immer für alle Pendelstäben.
Pendelstäbe, deren Stabkräfte nach innen zeigen, nennen wir Druckstäbe. Wenn die Stabkraft nach aussen zeigt nennen wir sie Zugstäbe.

2.8 Knotengleichgewicht

Beim Knotengleichgewicht schneiden wir einen Knoten (Gelenk) eines Starrkörpers frei und berechnen dort alle Kräfte, welche auf den Knoten wirken. Dadurch kann man die Kräfte bestimmen. Das Knotengleichgewicht verwendet man, wenn man mehrere Stabkräfte bestimmen möchte.

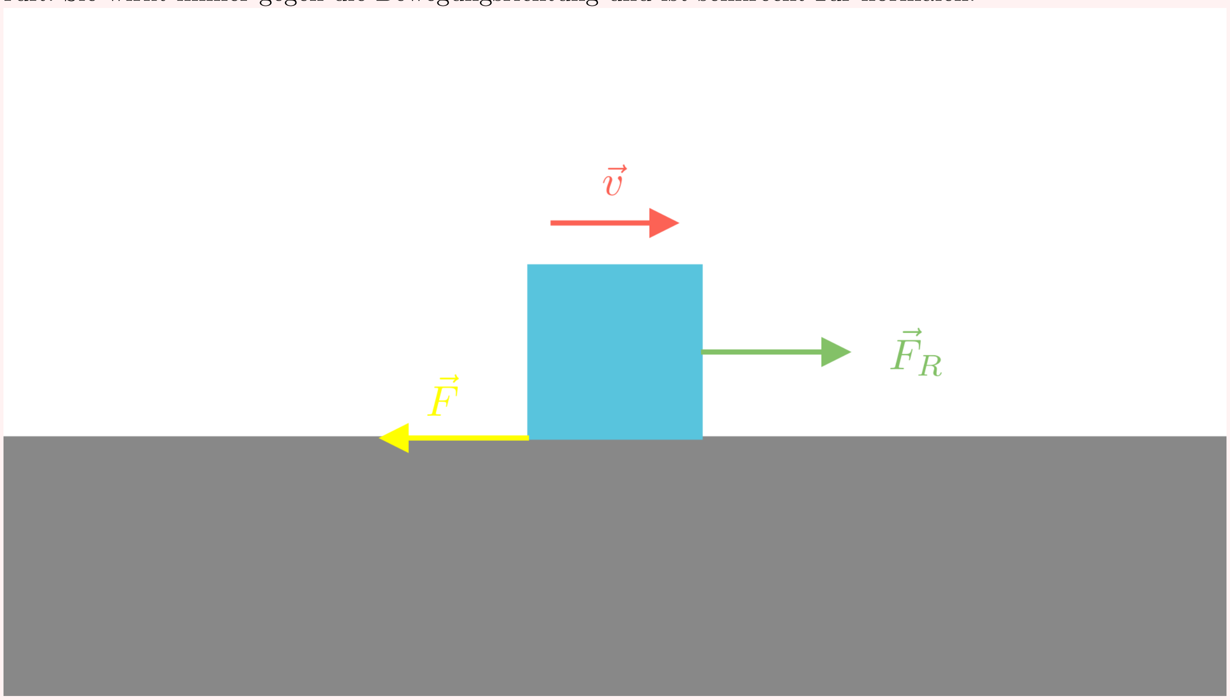
2.9 Kräfteschnitt

Beim Kräfteschnitt "schneidet" man das System frei, um die Stabkräfte der durchschnittenen Pendelstäbe zu bestimmen. Den Kräfteschnitt verwendet man vor allem, um mehrere Stabkräfte bestimmen zu können.

2.10 Reibung

Definition 2.10.1: Reibung

Die Reibung ist eine Kraft, welche gegen die Kraft wirkt, welche die Bewegung eines Starrkörpers hervorruft. Sie wirkt immer gegen die Bewegungsrichtung und ist senkrecht zur normalen.



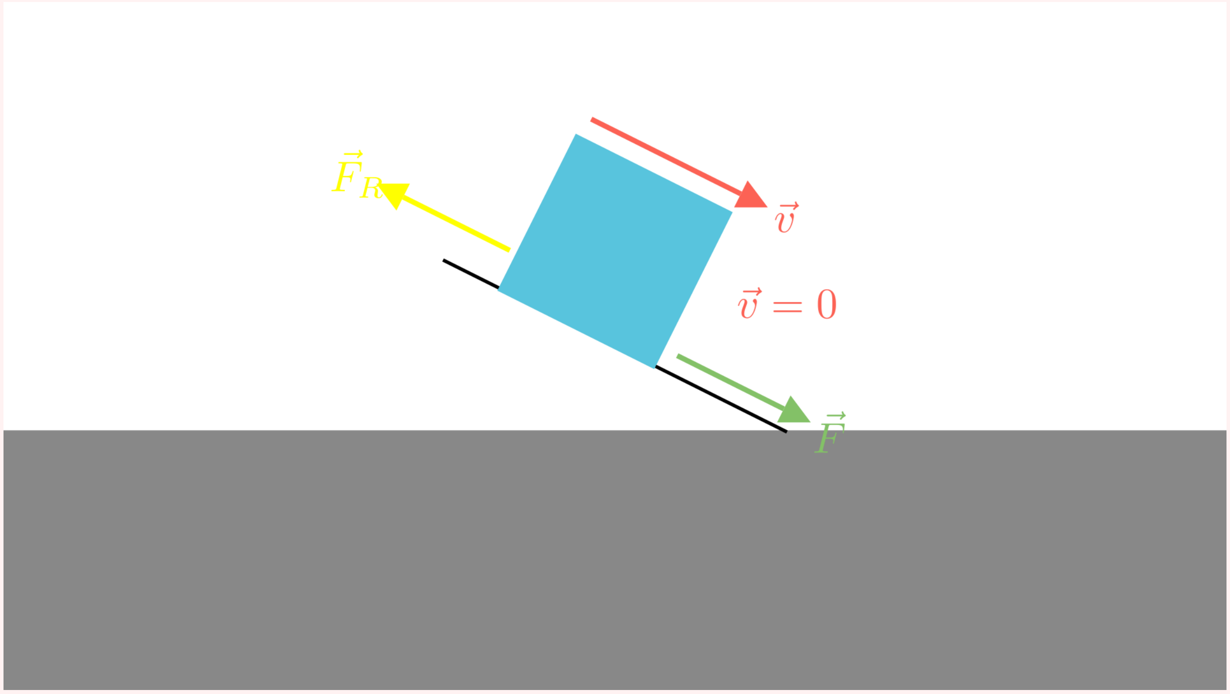
Bemerkung:-

Wenn die Reibung angegeben wird, so muss sie beim HS und PdvL berüchsichtigt werden.

Bei der Reibung unterscheiden wir zwischen 2 verschiedenene Arten.

Definition 2.10.2: Haftreibung

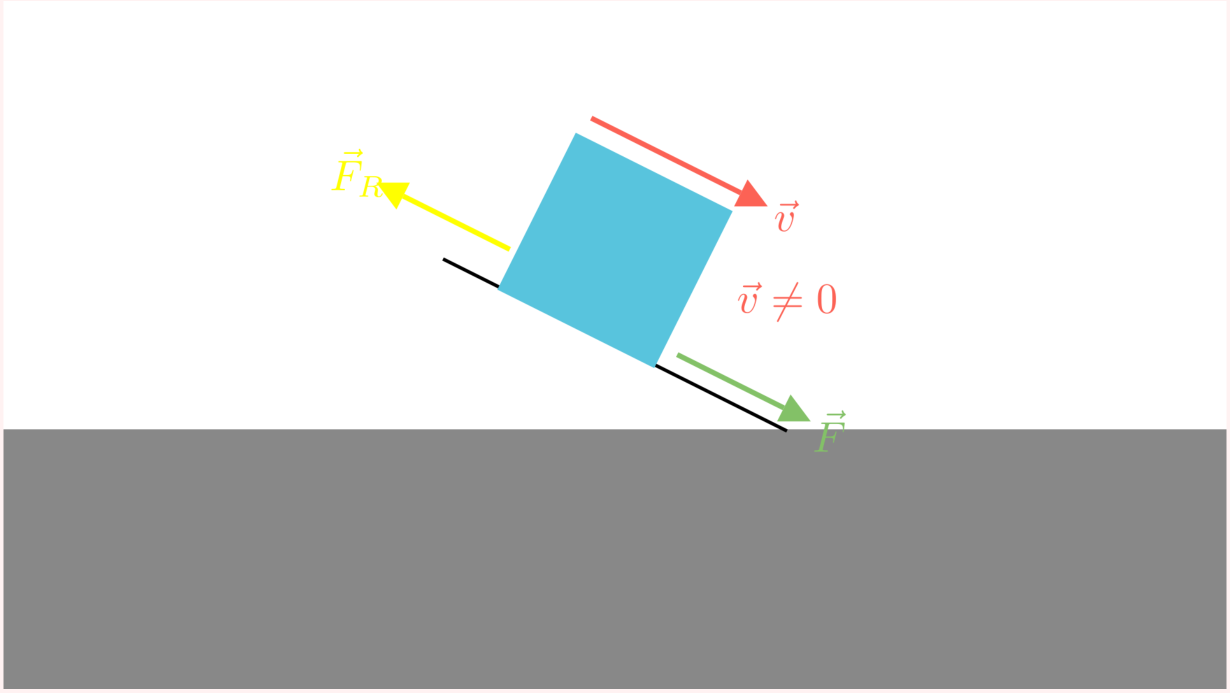
Bei der Haftreibung findet keine Bewegung der Körper zueinander statt. [de Windt, 2023]



$$|\vec{F}_R| \leqslant \mu_0 \cdot |\vec{N}| \tag{2.2}$$

Definition 2.10.3: Gleitreibung

Bei der Gleitreibung bewegen sich die Oberflächen der Körper relativ zueinander. Dabei gleitet der Körber und erfährt eine konstante Reibungskraft. [de Windt, 2023]



$$|\vec{F}_R| = \mu_0 \cdot |\vec{N}| \tag{2.3}$$

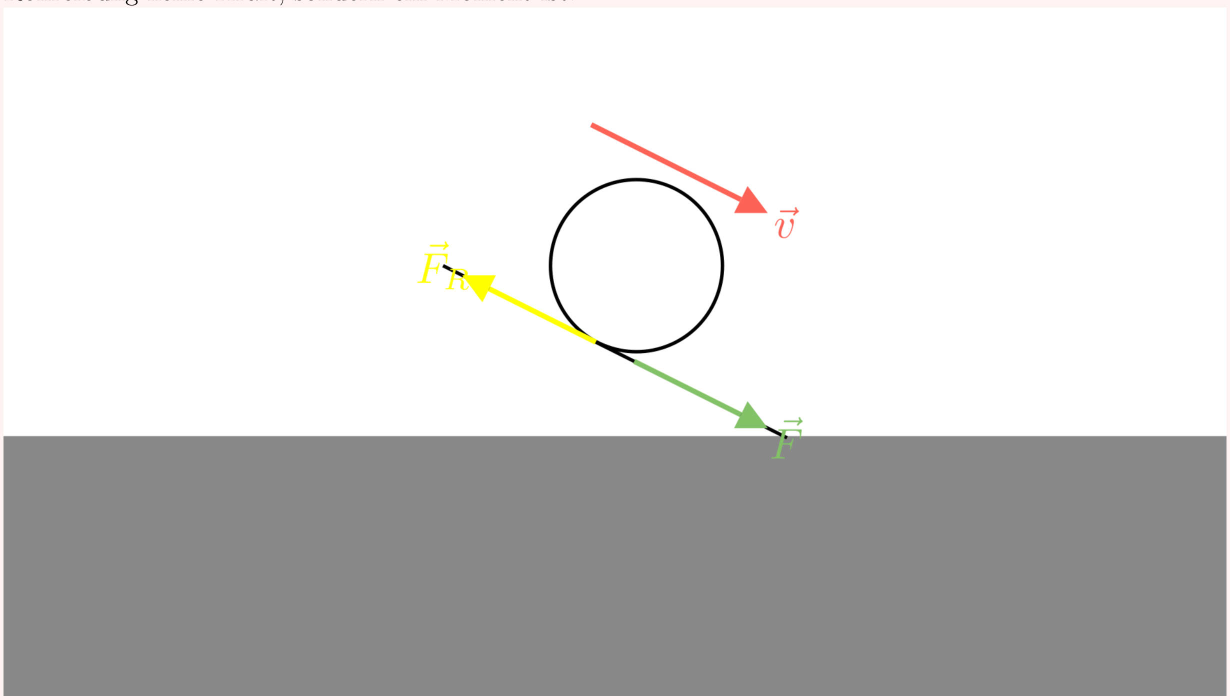
Bemerkung:-

Bei der Gleitreibung wird meistens μ_1 angegeben. Sei dir einfach bewust, dass $\mu_1 = \mu_0$ ist.

2.11 Rollreibung

Definition 2.11.1: Rollreibung

Rollreibung tritt auf, wenn ein Körper über einen anderen Körper rollt. [de Windt, 2023] Wie bei der Reibungskraft ist die Rollreibung entgegen der Bewegung gerichtet. Der Unterschied ist jedoch, dass die Rollreibung keine Kraft, sondern ein Moment ist.



Wie bei der Reibung unterscheiden wir zwischen zwei verschiedenen Rollreibungen.

Ruhe

Im Fall von Ruhe oder "Haftreibung":

$$|\vec{M}_R \leqslant \mu_2 \cdot |\vec{N}|.$$

Bewegung

Im Fall von Bewegung oder "Gleitreibung":

$$|\vec{M}_R = \mu_2 \cdot |\vec{N}|.$$

Bemerkung:-

Verwechsele nicht Rollreibung mit Reibung. Manchmal muss beides eingefürht werden.

2.12 Kippen

In der realen Welt können Körper kippen. Um zu prüfen, wann ein Körper kippt, muss die Normalkraft eingeführt werden.
Ein System ist standfest (kein Kippen), wenn $\vec{N}$ innerhalb der Standfläche liegt. [Tiso, 2024] Liegt $\vec{N}$ ausserhalb der Standfläche, so kippt der Körper.

Kapitel 3

Dynamik

3.1 Beschleunigung

Definition 3.1.1: Beschleunigung

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers sich ändert. [de Windt, 2023] Sie ist definiert als die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit t.

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{3.1}$$

Karthesische Koordinaten

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z \tag{3.2}$$

Zylindrischen Koordinaten

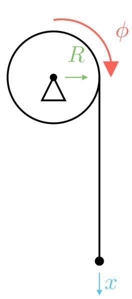
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z \tag{3.3}$$

Polar Koordinaten

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi \tag{3.4}$$

3.2 Kinematische Relationen

Kinematische Relationen kennzeichnen meistens, dass eine Koordinate mit einer anderen Koordinate abhängt. Dies ist meistens der Fall bei Rollen.

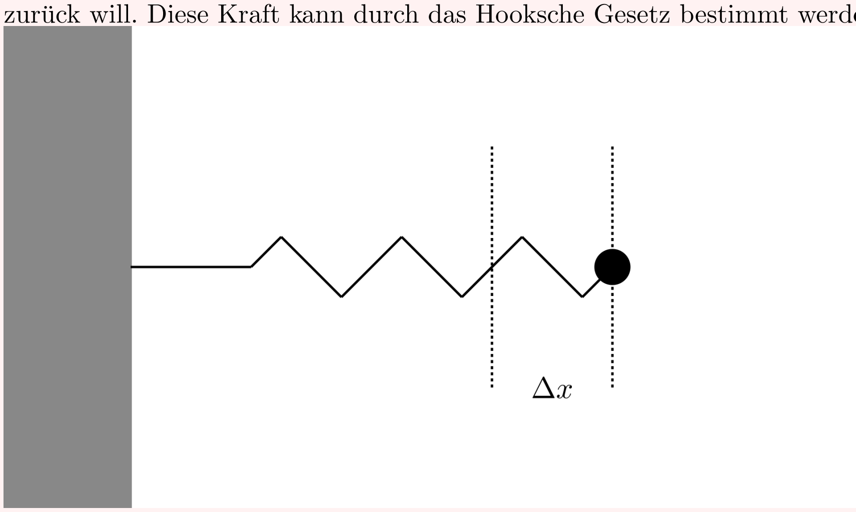


$$x = R \cdot \varphi \tag{3.5}$$

3.3 Feder

Definition 3.3.1: Feder

Eine Feder ist ein Bauteil, welches eine entgegengesetzte Kraft ausübt, da sie in ihre ursprüngliche Lage zurück will. Diese Kraft kann durch das Hooksche Gesetz bestimmt werden.



$$F_{\text{Feder}} = \pm k \cdot \Delta x \tag{3.6}$$

Bemerkung:-

Federn verringern den Freiheitsgrad eines Systems nicht. [de Windt, 2023]

3.4 Impuls

Definition 3.4.1: Impuls

Der Impuls beschreibt den Bewegungszustand eines Körpers. Sie ist definiert durch die folgende Formel.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{3.7}$$

Durch die Ableitung vom Impuls durch die Zeit t erhält man die resultierende Kraft, welche auf den Körper wirkt. Falls die Masse konstant ist, so gilt folgendes.

$$\dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{c}} = m \cdot \vec{a} = \vec{R} \tag{3.8}$$

Bemerkung:-

Durch den Impuls können wir nun das Bewegungsgesetz, sowie den Massemittelpunktsatz bilden. Diese beschreiben die Bewegung eines Starrkörpers.

3.5 Drall und Drallstatz

Definition 3.5.1: Drall

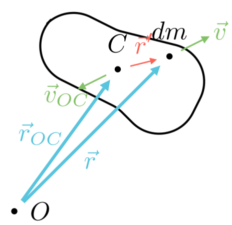
Der Drall ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungszustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (das heisst ein Punkt in Ruhe) oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen. [de Windt, 2023]

Bezüglich inertialer Punkt O:

$$\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v} dm \tag{3.9}$$

Bezüglich Massenmittelpunkt C:

$$\vec{L}_C = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}' dm \tag{3.10}$$



Satz von Steiner

Wie beim Moment gibt es für den Drall eine Transformationsregele zwischen verschiedenen Punkten.

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C \tag{3.11}$$

Definition 3.5.2: Drallstatz

Der Drallstatz ist ein physikalisches Gesetz, welches besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.
Drallstatz bezüglich des inertialen Punktes O:

$$\vec{L}_O = I_O \cdot \omega \tag{3.12}$$

Deallsatz bezüglich des Messenmittelpunktes C:

$$\vec{L}_C = I_C \cdot \omega \tag{3.13}$$

Bemerkung:-

Durch die Ableitung des Dralls erhält man das Moment.
bezüglich O:

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{tot} \tag{3.14}$$

bezüglich C:

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{tot} \tag{3.15}$$

3.6 Massenträgheitsmoment

Definition 3.6.1: Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. [de Windt, 2023]
bezüglich O:

$$I_O = \iint_B r^2 dm \tag{3.16}$$

bezüglich C:

$$I_C = \iint_B r'^2 dm \tag{3.17}$$

Wie beim Moment und Drall gibt es eine Transformationsregel für den Massenträgheitsmoment.

$$I_O = m \cdot r_{OC}^2 + I_C \tag{3.18}$$

Literaturverzeichnis

[de Windt, 2023] de Windt, L. (2023). TechMech PVK HS23.

[Kaufmann, 2017] Kaufmann, D. P. S. (2017). Technische Mechanik.

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim – Mathematical Animation Framework.

[Tiso, 2024] Tiso, D. P. P. (2024). Vorlesungen.