

DISCLAIMER

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen. Es hat sicherlich ein paar drinnen.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Serie 1

Aufgabe 1

a) $F = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cdot \sin(\varphi) \quad || \quad s = l\varphi$

$m \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \cdot \sin(\varphi) \quad || \quad x \ll L \Rightarrow \text{kleine Auslenkungen} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L} \varphi$

$F_{\text{Pendel}} = -mg \varphi$

$F_{\text{Feder}} = -k_F x$

$F_{\text{Ges}} = F_{\text{Pendel}} + F_{\text{Feder}} = -mg \varphi - k_F x = -mg \cdot \frac{x}{L} - k_F x$

$m \ddot{x} + mg \cdot \frac{x}{L} + k_F x = 0$

b) $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad || \text{Einsetzen in die Bewegungsgleichung}$

$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) - B \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad || \text{Einsetzen in die Bewegungsgleichung}$

~~$-m \cdot A \omega^2 \cos(\omega t) - m \cdot B \omega^2 \sin(\omega t) + mg \cdot \frac{A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)}{L} + k_F \cdot A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = 0$~~

$\left(-m A \omega^2 + \frac{mg A}{L} + k_F A \right) \cdot \cos(\omega t) + \left(-m B \omega^2 + \frac{mg B}{L} + k_F B \right) \sin(\omega t) = 0$

$\left(-m A \omega^2 + A \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] \right) \cdot \cos(\omega t) + \left(-m B \omega^2 + B \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] \right) \sin(\omega t) = 0$

$-m A \omega^2 + A \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] = 0$

$-m B \omega^2 + B \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] = 0$

$\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ können nicht 0 sein, da die Gleichung für $\forall t$ gelten muss.

$A \cdot \left(-m \omega^2 + \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] \right) = 0 \quad || \quad A \text{ kann nicht } 0 \text{ sein, da die Gleichung } x(0) = B \cdot \sin(\omega t) \text{ nicht gilt. (Anfangsbedingung!)}$

$-m \omega^2 + \left[\frac{mg}{L} + k_F \right] = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{\frac{mg}{L} + k_F}{m}}$

Anfangsbedingungen! $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A$ und B

$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k_F}{m}}$

Aufgabe 1

$$c) T_{\text{Pendel}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2$$

$$L = \frac{g}{\pi^2}$$

$$T_{\text{Ges}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L} + k_F}} = 1$$

$$1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\frac{g}{\pi^2}} + k_F}}$$

$$\frac{1}{4\pi^2} = \frac{m}{\frac{mg}{\frac{g}{\pi^2}} + k_F}$$

$$\frac{1}{4\pi^2} = \frac{m}{m\pi^2 + k_F}$$

$$4\pi^2 = \frac{m\pi^2 + k_F}{m}$$

$$k_F = 4\pi^2 m - m\pi^2 = 3\pi^2$$

$$\underline{k_F = 29.61 \frac{N}{m}} \quad \checkmark$$

Aufgabe 2

$$a) U_C + U_L = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \parallel \text{ in Gleichung einsetzen}$$

$$\frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d(\frac{dQ}{dt})}{dt} = 0 \quad \parallel \begin{array}{l} I \text{ ist negativ weil der Strom} \\ \text{aus dem Kondensator fließt.} \end{array} \Rightarrow \text{Stimmt nicht, ist positiv}$$

$$\frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\underline{\underline{-L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0}} \quad \underline{\underline{L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0}}$$

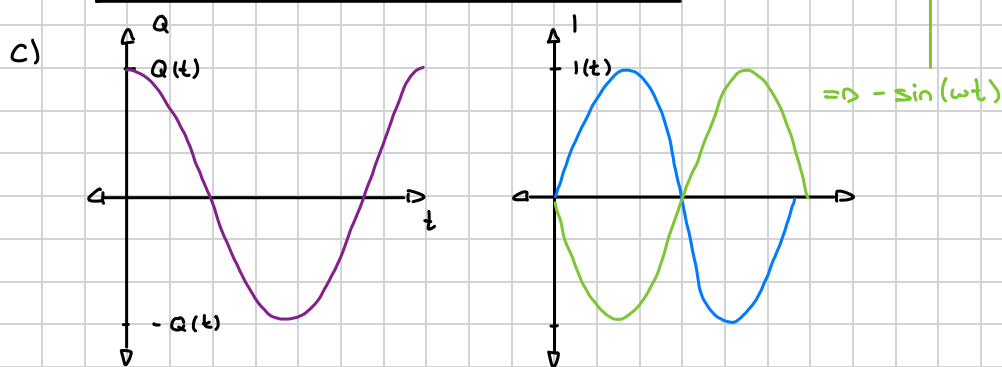
$$b) L = -mg$$

$$\frac{1}{C} = \frac{mg}{L} + k_F$$

$$Q = x$$

$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega t)$ // Gleichung für die allgemeine harmonische Schwingung

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t) = Q_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$



Aufgabe 3

a) $F_{\text{links}} - F_{\text{rechts}} = F_{\text{ges}}$ // F_{rechts} ist negativ, da F_{rechts} gegen F_{links} wirkt.

$$\pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \left(h_0 + \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g - \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \left(h_0 - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g = m \cdot \ddot{h}$$

$$m \ddot{h} - \pi R^2 \rho \cdot \left(h_0 + \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g + \pi R^2 \rho \cdot \left(h_0 - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g = 0$$

$$m \ddot{h} - 2\pi R^2 \rho \frac{\Delta h}{2} g = 0$$

$$\underline{m \ddot{h} - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0} \quad // \text{ da } m = \rho V \rightarrow \ddot{h} = -\frac{g}{h_0} h$$

$$h(t) = \frac{\Delta h}{2} \cdot \cos(\omega t) \quad // \text{ Allgemeine Gleichung einer harmonischen Schwingung}$$

$$\dot{h}(t) = -\frac{\Delta h}{2} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$\ddot{h}(t) = -\frac{\Delta h}{2} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \quad // \text{ Einsetzen in Bewegungsgleichung}$$

$$-m \cdot \frac{\Delta h}{2} \omega^2 \cos(\omega t) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0 \quad // \omega = 2\pi/T$$

$$-m \frac{\Delta h}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

$$-2\pi R^2 \rho h_0 \cdot \frac{\Delta h}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

$$-\pi R^2 \rho h_0 \Delta h \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

Wenn $h(t) = 0$ dann ist entweder Δh oder $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0$ Keine Ahnung ob das stimmt

$$-\pi R^2 \rho h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} - \pi R^2 \rho g = 0$$

$$\pi R^2 \rho \left(h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} + g \right) = 0 \quad \parallel \pi R^2 \rho \text{ kann nicht 0 sein}$$

$$h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} + g = 0$$

$$\underline{\underline{h_0 = -\frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = -0.1 \text{ m}}}$$

Die Höhe ist negativ da wir die Oberfläche der Flüssigkeit während dem Gleichgewicht als 0-Punkt betrachten.

$$b) \frac{\Delta h^*}{2} = 0.0015 \text{ m} = h(t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$h(t) = \pm \frac{\Delta h}{2} \cdot \cos(\omega t) \quad \parallel \pm \frac{\Delta h}{2} \Rightarrow 2 \text{ Ergebnisse}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\arccos\left(\frac{\pm \Delta h}{2h(t)}\right)}{\omega} = 0.14 \text{ s} / 0.17 \text{ s} \quad (\text{Periodisch!})}}$$

Aufgabe 1

a) $V_0 = \frac{1}{T}$ || $T \sim 0.95s$ (Sollte man das vom Graph abschätzen?)

$$\underline{V_0 = \frac{1}{0.95} = 1.05 \text{ Hz}}$$

$x(t) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t)$ || Allgemeine Gleichung für harmonische Schwingungen mit schwacher Dämpfung; $A = 0.4$; bei Amplituden ist $\cos(\omega t) = 1$
 $x(t) = A e^{-\gamma t}$ || $t = 1.95s \rightarrow x(t) = 0.1m$

$$0.1 = 0.4 \cdot e^{-1.95\gamma}$$

$$\ln(0.25) = -1.95\gamma$$

$$\underline{-m \cdot \frac{\ln(0.25)}{1.95} = \gamma = 0.427}$$

|| Verbesserung für Serie, bitte einheitlich. Entweder γ oder b

$\omega_0 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ || kann man $\omega = \omega_0$ behaupten?

$$k = \omega_0^2 m$$

$$\underline{\omega_0 = V_0 \cdot 2\pi = 1.05 \cdot 2\pi = 6.60}$$

$$\underline{k = 6.60^2 \cdot 0.6 = 26.1}$$

$$Q = \omega_0 \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{k} = \frac{0.6}{0.427} = 1.41$$

$$\underline{Q = 6.60 \cdot 1.41 = 9.28}$$

b) $\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$x(t) = X_0 \cdot \cos(\Omega t)$ || Gleichung für harmonische Schwingung im Gleichgewicht.

$$\dot{x}(t) = -X_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -X_0 \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t)$$

$$-m \cdot X_0 \Omega^2 \cos(\Omega t) - b \cdot X_0 \Omega \sin(\Omega t) + k \cdot X_0 \cos(\Omega t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$(kX_0 - mX_0\Omega^2) \cos(\Omega t) - bX_0\Omega \sin(\Omega t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

|| Da das Endresultat nicht von $\sin(\Omega t)$ abhängt, muss es 0 sein

$$\Rightarrow F_0 = kX_0 - mX_0\Omega^2$$

Aufgabe 1

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0}{kx_0 - mx_0}} = \sqrt{\frac{0.5}{26.1 \cdot 0.08 - 0.6 \cdot 0.08}} = 0.495$$

$$\begin{aligned} c) \quad \delta &= \arctan\left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad \parallel \quad \gamma = \frac{b}{m} = 0.427 \\ &= \arctan\left(\frac{-0.427 \cdot 0.495}{6.6^2 - 0.495^2}\right) = -0.299^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$a) \quad \ddot{x}_1(t) = -\omega_0^2 x_1 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} (x_2 - x_1)$$

$$b) \quad \begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_2 \\ z_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\ x_2 &= \frac{z_2 - z_1}{2} \end{aligned} \right. \quad \text{Einsetzen}$$

$$\frac{1}{2} (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{k}{m} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_2 - z_1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{k}{m} z_1$$

$$\frac{1}{2} (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} - \frac{k}{m} \left(\frac{z_2 - z_1}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{k}{m} z_1$$

Addieren oder subtrahieren

$$\text{Addition: } \ddot{z}_2 = -\omega_0^2 z_2$$

$$\text{Subtraktion: } \ddot{z}_1 = -\omega_0^2 z_1 - 2 \frac{k}{m} z_1$$

$$c) \quad z_1 = 0 \quad \parallel \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow x_1(0) = x_2(0) \rightarrow$ Beide Pendeln sind zu jedem Zeitpunkt an der gleichen Position. Daraus folgt, dass die Kreisfrequenz gleich ist. $\omega = \omega_0$

$$z_2 = 0 \quad \parallel \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow x_1(0) = -x_2(0) \rightarrow$ Die Positionen der Pendel ist unterschiedlich
 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \frac{k}{m}}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 ist sehr assoziell ü

a) $V = \frac{3}{2\pi} \left\| \right. \text{Hätte ich hier auch nur mit Variablen rechnen sollen?}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}}$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{3 \cdot E \cdot l}{L^3}$$

$$I = \frac{H^3 W}{12} = \frac{(200 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (50 \cdot 10^{-6})}{12} = 3.33 \cdot 10^{-26}$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{3 \cdot 170 \cdot 10^9 \cdot 3.33 \cdot 10^{-26}}{(120 \cdot 10^{-6})^3} = 9.84 \cdot 10^{-3}$$

$$m_0 = \rho \cdot L \cdot W \cdot H = 2320 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-9} = 2.78 \cdot 10^{-12}$$

$$m_{\text{eff}} = \frac{3}{16} m_0 = \frac{3}{16} \cdot 2.78 \cdot 10^{-12} = 5.22 \cdot 10^{-13}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{9.84 \cdot 10^{-3}}{5.22 \cdot 10^{-13}}} = 137060$$

$$V = \frac{137060}{2\pi} \approx 21860 \text{ Hz}$$

$$L = \frac{9}{4\pi^2 V^2} = \frac{9.84}{4 \cdot \pi^2 \cdot (21860)^2} = 0.521 \text{ nm}$$

b) $V = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{\frac{3}{16} m_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16 k_{\text{eff}}}{3 m_0}}$

$$\Rightarrow V = \frac{C}{\sqrt{m}} \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16 k_{\text{eff}}}{3}}$$

Taylorreihe:

$$V(m_0 + \Delta m_0) \approx V(m_0) + \left(\frac{dV}{dm} \right)_{m_0} \cdot \Delta m_0$$

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{C}{2} \cdot m^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dV}{dm} \right)_{m_0} = -\frac{C}{2} \cdot m_0^{-3/2}$$

$$\Delta V = V(m_0 + \Delta m_0) - V(m_0) \quad \parallel \text{Approximation einsetzen}$$

Aufgabe 3

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{dm} \right)_{m_0} \cdot \Delta m_0$$

$$\Delta m_0 = - \frac{2}{c \cdot m_0^{-3/2}} \cdot \Delta U$$

$$= - \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{16 \text{ kg}}{3}} \cdot m_0^{-3/2}} \cdot \Delta U$$



Kommt das an der Prüfung?

c) Ich habe kein Plan... ʘ

