

Notizen zur Vorlesung Analysis 2 für ITET und RW,  
Frühjahrssemester 2024

F. Ziltener

14. Februar 2025



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>0 Ausblick auf die Vorlesung</b>	<b>3</b>
<b>1 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik</b>	<b>9</b>
1.1 Definition einer GDG, Anfangswertproblem, Beispiele . . . . .	9
1.2 Linearität und Homogenität einer GDG, Lösungsraum, charakteristisches Polynom einer GDG . . . . .	17
1.3 Homogene GDG zweiter Ordnung, freier gedämpfter harmonischer Oszillator . . . . .	24
1.4 Inhomogene GDG, elektrischer Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle	28
1.5 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme . .	33
<b>2 Topologie, Stetigkeit</b>	<b>47</b>
2.1 Abschluss einer Menge, Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit, Kompaktheit . . . . .	47
2.2 Topologie, innerer Punkt, Inneres, Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Rand . . . . .	55
2.3 Topologisches Kriterium für Stetigkeit . . . . .	62
<b>3 Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>67</b>
3.1 Partielle Ableitungen und Differential . . . . .	67
3.2 Differentiationsregeln, Kettenregel, Richtungsableitung, Gradient . . . .	77
3.3 Vektorfeld, Potential und Wegintegral . . . . .	88
3.4 Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integritätsbedingung . . . . .	99
3.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Taylorpolynom, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix . . . . .	107
<b>4 Umkehrsatz, implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit, Tangentialraum</b>	<b>125</b>

4.1	$C^k$ -Diffeomorphismus, Umkehrsatz	125
4.2	Der Satz über implizite Funktionen	131
4.3	Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums	139
4.4	Immersionen, Einbettungen, Submersionen, Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten	142
4.5	Satz vom regulären Wert	146
4.6	Tangententialraum an eine Untermannigfaltigkeit	148
4.7	Tangentialabbildung	154
4.8	Kritische Punkte auf einer Untermannigfaltigkeit	158
<b>5</b>	<b>Mehrdimensionale Riemann-Integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale</b>	<b>163</b>
5.1	Riemann-Integral	164
5.2	Eigenschaften des Riemann-Integrals	170
5.3	Satz von Fubini, mehrfache Integration	173
5.4	Jordan-Mass	176
5.5	Substitutionsregel, Integral einer drehinvarianten Funktion, Transformationssatz für das Volumen	179
<b>6</b>	<b>Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauß</b>	<b>189</b>
6.1	Kurvenintegral, Orientierung, $C^k$ -Gebiet	189
6.2	Satz von Green	196
6.3	Untermannigfaltigkeit mit Rand und Koorientierung einer Hyperfläche	199
6.4	Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit, Zusammenhang mit dem Kurvenintegral	206
6.5	Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, zweidimensionaler Fall, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche	212
6.6	Satz von Stokes	217
6.7	Satz von Gauß	222
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>229</b>

## Vorwort

Im Frühjahrssemester halte ich an der ETH Zürich die Vorlesung *Analysis 2* für Studierende der Studiengänge ITET und RW. Diese Notizen ergänzen die folgende Literatur für dieses Fach:

M. Struwe, *Analysis für Informatik*, Skript, 5. November 2010.

Chr. Blatter, *Ingenieur-Analysis 2*, Zürich: Verlag der Fachvereine (vdf), 1989.

K. Königsberger, *Analysis 2*, 6. Ausgabe, Springer-Lehrbuch, 2004.

Ich hoffe, dass Ihnen meine Notizen beim Verständnis des Stoffes helfen werden. Rückmeldungen sind willkommen! Bitte schicken Sie diese an [fabian.ziltener@math.ethz.ch](mailto:fabian.ziltener@math.ethz.ch) .

Fabian Ziltener, ETH Zürich



# Kapitel 0

## Ausblick auf die Vorlesung

Ich beginne die Vorlesung Analysis 2 mit einem **Ausblick** auf den Stoff der Vorlesung sowie einem kurzen Ausblick auf Analysis 3. Da ich in kurzer Zeit viele verschiedene Themen ansprechen werde, kann ich es mir gut vorstellen, dass Sie einiges, was ich jetzt erzählen werde, nicht gleich verstehen werden. Das ist nicht schlimm, da wir die Themen später ausführlich behandeln werden.

Wiederholung von Analysis 1: Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , Ableitung, Integral

Jetzt:  $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Wir betrachten  $f = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  ( $n, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ). Ein Beispiel aus der Physik ist die Dichte einer Grösse (zum Beispiel der Masse oder Ladung). Die Dichte (zu einem festen Zeitpunkt) ist eine Funktion  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . ( $\rho(x)$  ist die Dichte an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^3$ .)

Wir betrachten nun den Fall  $n = l$ . Dann können wir  $f$  als ein *Vektorfeld* auffassen, also als eine Abbildung, die jedem Punkt im Raum  $\mathbb{R}^n$  einen Vektor in  $\mathbb{R}^n$  zuordnet. Ein Beispiel eines Vektorfeldes aus der Physik ist elektrische Feld, das wir als eine Funktion  $f = \mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  auffassen können. Hierbei ist  $\mathbf{E}(x)$  die elektrische Feldstärke am Ort  $x \in \mathbb{R}^3$ .

In dieser Vorlesung werden wir Definitionen und Sätze, die Sie aus Analysis 1 für Funktionen einer Variable kennen, auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern. Beispiele dafür sind die Definition der Ableitung und des Integrals, die Kettenregel, die Substitutionsregel und der Umkehrsatz.

Darüber hinaus werden wir Sätze kennenlernen, die keine Entsprechung in der Analysis 1 haben. Dazu gehören der Satz von der impliziten Funktion, der Bedingungen angibt, unter denen wir die Lösung  $y$  der Gleichung  $f(x, y) = 0$  lokal als eine Funktion von  $x$  auffassen können. In physikalischen Anwendungen sind  $x$  und  $y$  physikalische Grössen und die Gleichung  $f(x, y) = 0$  ein physikalisches Gesetz. Der Satz von der impliziten

Funktion besagt dann, dass wir die Grösse  $y$  als eine Funktion der Grösse  $x$  auffassen können.

Ein weiteres Resultat ohne Entsprechung in Analysis 1 ist die Lagrange-Multiplikatorregel. Mit Hilfe dieser Regel können wir das Maximum einer reellwertigen Funktion auf einem kompakten Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  bestimmen. (Den Begriff der Kompaktheit werden wir in Analysis 2 kennenlernen.)

Den Begriff der Ableitung einer Funktion einer Variable aus Analysis 1 verallgemeinern wir in dieser Vorlesung zum Begriff einer partiellen Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen. Wir definieren nämlich die *partielle Ableitung* einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach der  $i$ -ten Variable  $x_i$  als die Funktion  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ <sup>1</sup> gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \left. \frac{d}{dy} \right|_{y=x_i} f(\dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots).$$

Das ist die gewöhnliche Ableitung (wie in Analysis 1) der Funktion einer Variable, die wir aus  $f$  erhalten, indem wir alle Variablen ausser  $x_i$  festhalten. Wir nehmen diese gewöhnliche Ableitung an der vorgegebenen Stelle  $x_i$ .

**Beispiel:** Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x_j$ . Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \delta_{ji} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Ziel dieser Vorlesung ist es, den Satz von Gauß über die Divergenz eines Vektorfeldes zu behandeln. Die *Divergenz* eines Vektorfeldes  $f = K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$\operatorname{div}(K) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial K_i}{\partial x_i}.$$

**Beispiel:**  $K(x) := x$ , d.h.,  $K_i(x) = x_i$ . Dann haben wir

$$\operatorname{div}(K) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n.$$

Sei jetzt  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Der *Satz von Gauß* besagt, dass

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(K) \, dx = \int_{\partial\Omega} K \cdot \nu \, do. \quad (1)$$

In dieser Vorlesung werden wir die Objekte, die in dieser Gleichheit vorkommen, ausführlich behandeln. Um Ihnen jetzt schon eine Idee zu geben, was sie bedeuten, folgen ein paar kurze Erklärungen.

<sup>1</sup>Das Zeichen  $\partial$  ist ein geschwungenes  $d$  und wird “del” ausgesprochen, in Anlehnung an den griechischen Buchstaben  $\delta$  (delta).

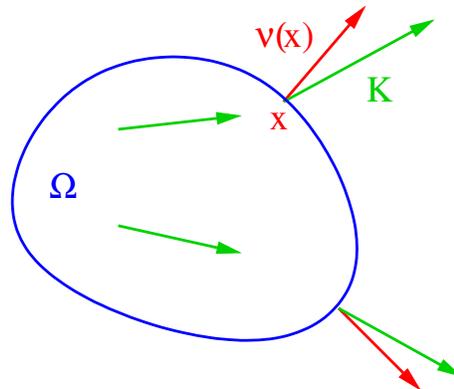


Abbildung 0.1: Die Objekte im Satz von Gauß: ein Gebiet  $\Omega$ , Vektorfeld  $K$  und das äussere Einheitsnormalenvektorfeld  $\nu$  auf dem Rand  $\partial\Omega$ .

**Kurze Erklärungen:** Auf der linken Seite von (1) steht das mehrdimensionale Integral der Funktion  $\operatorname{div}(K) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  über  $\Omega$ . Mehrdimensionale Integrale verallgemeinern eindimensionale Integrale. Wir werden sie in dieser Vorlesung definieren. Auf der rechten Seite von (1) tritt das *äussere Einheitsnormalenvektorfeld*  $\nu$  auf. Das ist die Funktion  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedem Punkt  $x \in \partial\Omega$  den eindeutigen Vektor  $\nu(x)$  zuordnet, der senkrecht auf dem Rand  $\partial\Omega$  steht und nach aussen weist. Siehe Abbildung 0.1. Auf der rechten Seite von (1) steht das *Oberflächenintegral* der Funktion  $f := K \cdot \nu$ , die auf dem Rand  $\partial\Omega$  des Gebietes  $\Omega$  definiert ist. Im Fall  $n = 3$  ist  $do$  intuitiv der Flächeninhalt eines infinitesimalen Stücks der Fläche  $\Omega$ , und das Integral  $\int_{\partial\Omega} f do$  ist durch die unendliche Summe  $\sum_{x \in \partial\Omega} f(x) do$  gegeben. Das ist analog zur intuitiven Interpretation des Integrals einer Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. ( $do$  ist analog zur Länge eines infinitesimalen Teilintervalls.) In dieser Vorlesung werden wir den Begriff des Oberflächenintegral präzise definieren.

Das Integral auf der rechten Seite von (1) heisst der *Fluss* von  $K$  durch  $\partial\Omega$ . Anschaulich entspricht dieser Fluss der Menge eines Stoffes, die pro Zeitspanne aus dem Gebiet  $\Omega$  herausfliesst, wenn  $K = \rho v$ , wobei  $\rho(x)$  die Teilchenzahldichte<sup>2</sup> des Stoffes an der Stelle  $x$  und  $v(x)$  die Geschwindigkeit des Stoffes an der Stelle  $x$  ist. Der Satz von Gauß stellt also eine Verbindung zwischen dem Stoffmengenfluss durch die Oberfläche des Gebietes und dem Integral der Divergenz von  $\rho v$  über das Gebiet her.

Der Satz von Gauß wird in Anwendungen verwendet, um eine Verbindung zwischen der differentiellen und der integralen Form gewisser physikalischer Gesetze herzustellen. Zum Beispiel wird er in der Strömungslehre gebraucht, um die Erhaltung der

<sup>2</sup>Diese Grösse wird auch *Teilchendichte* genannt.

Teilchenzahl aus der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

herzuleiten. Erhaltung der Teilchenzahl ist die integrale Form eines physikalischen Gesetzes, und die Kontinuitätsgleichung ist die differentielle Form davon. (*Differentiell* bedeutet, dass es mittels partieller Ableitungen formuliert ist.) Strömungslehre wird in den Vorlesungen des Studienganges RW *Fluiddynamik I* (4. Semester, Grundlagenfach) und *Fluiddynamik II* (5. Semester, Vertiefungsgebiet) behandelt.

Als ein anderes Beispiel sagt das *Gaußsche Gesetz* der Elektrostatik, dass der Fluss des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  über den Rand eines Gebietes  $\Omega$  proportional zur Ladung  $Q$  im Gebiet ist, genauer, dass

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \nu \, d\sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

wobei  $\varepsilon_0 \approx 8.9 \cdot 10^{-12} \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{sec}^4 \text{A}^2$  die elektrische Feldkonstante ist. Dieses Gesetz kann mittels des Satzes von Gauß aus der *Maxwellgleichung*

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

hergeleitet werden. Das Gaußsche Gesetz ist die integrale Form eines physikalischen Gesetzes, die obige Maxwellgleichung ist die differentielle Form davon. Elektrostatik wird in der Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen* behandelt (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).

Ein weiteres Ziel der Vorlesung Analysis 2 ist es, den *Satz von Stokes* über die Rotation eines Vektorfeldes zu behandeln. Dieser Satz wird zum Beispiel in der Elektrodynamik gebraucht, um das faradaysche Induktionsgesetz aus einer der vier Maxwellgleichungen herzuleiten. Siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.

Die hier erwähnten Maxwellgleichungen und die Kontinuitätsgleichung sind *partielle Differentialgleichungen*. Grob gesagt, ist eine partielle Differentialgleichung (PDG) eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der die Funktion und ihre partiellen Ableitungen (auch höherer Ordnung) auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Größe, die vom Ort und manchmal von der Zeit abhängt.

Ein weiteres Beispiel für eine PDG ist die Wellengleichung, die unter anderem die Ausbreitung von Schallwellen und elektromagnetischen Wellen beschreibt. PDG werden in der Vorlesung *Analysis 3* behandelt, die ich nächstes Semester halten werde. Diese Vorlesung baut auf der Vorlesung Analysis 2 auf.

**Wenn Sie jetzt nicht alles aus dieser Übersicht über Analysis 2 und 3 verstanden haben**, ist das nicht schlimm. Wir werden die angerissenen Themen in dieser Vorlesung und in Analysis 3 ausführlich behandeln.



# Kapitel 1

## Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

Das erste Thema der Vorlesung Analysis 2 sind gewöhnliche Differentialgleichungen (GDG). Im Skript [Stra](#) wird dieses Thema im Abschnitt 5.6 behandelt. (Auf der Vorlesungswebseite wird für jede Woche angegeben, wo der Stoff im Skript [Stra](#) zu finden ist.) Das Thema GDG wurde schon in Analysis 1 gestreift. Grob gesagt, ist eine gewöhnliche Differentialgleichung eine Gleichung für eine gesuchte Funktion einer reellen Veränderlichen, in der die Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Größe, die von der Zeit abhängt.

### 1.1 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung, Anfangswertproblem, Beispiele, gedämpfter Federschwinger, elektrischer Schwingkreis

Sei  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  und  $I$  ein offenes Intervall. ( $I$  kann beschränkt oder unbeschränkt sein.) Wir bezeichnen die Variable in  $\mathbb{R}$  mit  $t$ , verwenden die in der Physik gebräuchliche Notation  $\dot{f} = f'$  für die Ableitung von  $f$  und schreiben  $f^{(k)}$  für die  $k$ -te Ableitung von  $f$ .

**Definition.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG) der Ordnung  $n$  für eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Gleichung der Form

$$\varphi(t, f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I, \quad (1.1)$$

wobei  $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  eine feste Funktion ist, die nicht bezüglich der letzten Variable konstant ist.

Analog definieren wir den Begriff einer GDG für eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , indem wir oben überall  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{C}$  ersetzen<sup>1</sup>

**Beispiele 1.1.** [gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, radioaktiver Zerfall] Wir betrachten den Fall  $n = 1$ .

- (i) Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 - g(t).$$

Gemäss (1.1) entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} \varphi(t, f(t), \dot{f}(t)) &= \dot{f}(t) - g(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } \dot{f}(t) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$u(t) = \int_0^t g(s) ds + c$$

die Gleichung (1.2) löst und dass das die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind. Das haben Sie in Analysis I gelernt.

- (ii) Sei  $a_0 \in \mathbb{R}$  und die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 + a_0 x_0.$$

Gemäss (1.1) entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} \varphi(t, f(t), \dot{f}(t)) &= \dot{f}(t) + a_0 f(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } \dot{f} &= -a_0 f. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Diese GDG beschreibt zum Beispiel radioaktiven Zerfall. Dabei spielen  $t, f, a_0$  die folgenden Rollen:

---

<sup>1</sup>Das Intervall  $I$  bleibt dabei unverändert.

$t :=$  Zeit

$f(t) :=$  Anzahl Atome eines bestimmten Elementes, die zur Zeit  $t$  noch nicht zerfallen sind

$a_0 :=$  Zerfallskonstante

Die allgemeine Lösung der GDG (1.3) ist gegeben durch

$$f(t) = ce^{-a_0 t},$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist. Dass diese Funktion die Gleichung (1.3) löst, folgt durch Nachrechnen. (Rechnen Sie das nach!) Dass sie die einzige Lösung der Gleichung ist, haben Sie in Analysis 1 bewiesen. (Siehe [Stra, Beispiel 5.2.1 i), S. 85], worin [Stra, Korollar 5.2.1] ( $f' \equiv 0 \implies f \equiv \text{const}$ ) verwendet wird.)  $\triangle^2$

**Bemerkung.** [Anfangsbedingung] Sei  $f_0 \in \mathbb{R}$ . Die Konstante  $c$  im Beispiel 1.1(ii) wird eindeutig durch die *Anfangsbedingung*

$$f(0) = f_0$$

festgelegt. Es gilt nämlich  $c = f_0$ , d. h.  $f(t) := f_0 e^{-a_0 t}$  ist die eindeutige Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{f} &= -a_0 f, \\ f(0) &= f_0. \end{aligned}$$

$\triangle$

**Beispiel.** [keine GDG] Die Gleichung

$$\dot{f}(t) = f(t-1)$$

ist keine GDG<sup>3</sup>, da sich das Argument  $t-1$  der Funktion auf der rechten Seite vom Argument  $t$  der Funktion auf der linken Seite unterscheidet. Die Gleichung ist eine *retardierte Differentialgleichung* (english: *delayed differential equation*).  $\triangle$

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel aus der Mechanik. Für eine ausführlichere Beschreibung dieses Beispiels siehe [Pap15, 4.1 Mechanische Schwingungen, S. 417].

**Beispiel 1.2.** [gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, freier gedämpfter Feder-schwinger] Wir betrachten den Fall  $n = 2$ . Seien  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  und die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\varphi(t, x_0, x_1, x_2) := x_2 + a_1 x_1 + a_0 x_0.$$

<sup>2</sup>Mit diesem Zeichen wird das Ende eines Beispiels oder einer Bemerkung angedeutet.

<sup>3</sup>im Sinne dieser Vorlesung

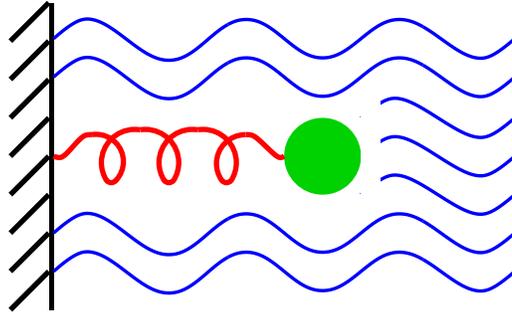


Abbildung 1.1: Federschwinger in einer zähen Flüssigkeit

Gemäss (1.1) entspricht diese Funktion der GDG

$$\varphi(t, f(t), \dot{f}(t), \ddot{f}(t)) = \ddot{f}(t) + a_1 \dot{f}(t) + a_0 f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Diese GDG beschreibt zum Beispiel die Bewegung eines freien<sup>4</sup> Federschwingers (=Federpendel), der in einer zähen Flüssigkeit liegt und daher durch viskose Reibung gedämpft wird. Damit meinen wir das mechanische System, das aus einem kugelförmigen Körper besteht, der über eine horizontale Feder an einer ruhenden Wand befestigt ist und in einer zähen Flüssigkeit liegt. Siehe Abbildung 1.1. Wir leiten die GDG (1.4) mittels Gesetzen der Mechanik und der Strömungslehre her. Wir schreiben:

$t$  := Zeit

$x(t)$  := Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage zur Zeit  $t$  (= gesuchte Grösse)

$F_0$  := Rückstellkraft der Feder

$R$  := durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Reibungskraft

$F$  := gesamte auf den Körper einwirkende Kraft

$k$  := Federkonstante

$c$  := Dämpfungskonstante

$m$  := Masse des Körpers

Es gelten die folgenden Gesetze der Mechanik und der Strömungslehre:

- Hookesches Gesetz:

$$F_0 = -kx$$

- Stokessches Reibungsgesetz:

$$R = -c\dot{x}$$

---

<sup>4</sup>Frei bedeutet, dass es keine äussere Anregungskraft gibt.

- zweites Newtonsches Gesetz:

$$= m\ddot{x}.$$

Diese Gesetze werden in den Vorlesungen *Technische Mechanik* (ITET, 1. Semester), *Physik I* (RW, 1. Semester) und *Fluidodynamik I* (RW, 4. Semester, Grundlagenfach) behandelt. Durch Kombinieren dieser Gesetze erhalten wir

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &=_{=0} +_R = -kx - c\dot{x}, \\ \text{also } \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wir erhalten also die GDG (1.4) mit  $a_0 = \frac{k}{m}$  und  $a_1 = \frac{c}{m}$ .

Wir betrachten jetzt den Fall eines idealen (d. h. ungedämpften) Federschwingers. Das bedeutet, dass  $c = 0$ . Wir definieren

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  löst die Funktion

$$x(t) := a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

in diesem Fall die GDG (1.4). (Überprüfen Sie das!) △

**Bemerkung.** In diesem Abschnitt werden wir eine Formel für die allgemeine Lösung der GDG (1.4) im allgemeinen Fall kennenlernen. (Siehe Proposition 1.9 in Abschnitt 1.2.)

Wir betrachten nun ein Beispiel aus der Elektrotechnik. Für eine ausführlichere Beschreibung dieses Beispiels siehe [Pap15], 4.2 Elektrische Schwingungen, S. 445].

**Beispiel 1.3.** [elektrischer Schwingkreis, freie und erzwungene gedämpfte Schwingung] In diesem Beispiel betrachten wir die elektrische Reihenschaltung, die aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule besteht, die hintereinandergeschaltet sind. Wir betrachten zwei Typen realer (gedämpfter) Reihenschwingkreise:

- Freier Schwingkreis. Das ist die Schaltung, die wir aus der Reihenschaltung erhalten, indem wir ihre Enden miteinander verbinden. (Dadurch entsteht ein Kreis.) Siehe Abbildung 1.2.
- Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle. Das ist die Schaltung, die durch die Reihenschaltung entsteht, indem wir ihre Enden mit einer Wechselspannungsquelle verbinden. Siehe Abbildung 1.3.

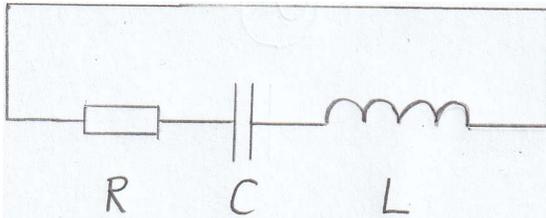


Abbildung 1.2: Freier Schwingkreis.

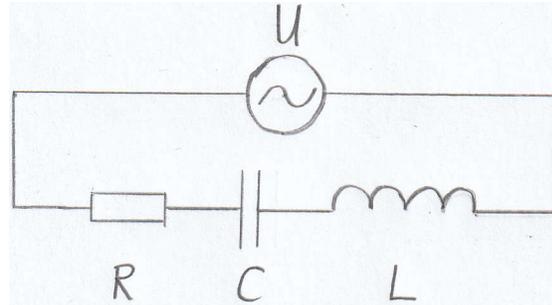


Abbildung 1.3: Schwingkreis mit Wechsellspannungsquelle. Die angelegte Spannung erzwingt eine Schwingung.

**Probleme:**

- (i) (**Freie Schwingung:**) Beschreibe die Schwingungen der Stromstärke im freien Schwingkreis (a).
- (ii) (**Erzwungene Schwingung:**) Beschreibe die durch die angelegte Spannung erzeugte zeitabhängige Stromstärke  $I$  des Stroms, der durch die Schaltung (b) fließt!

**Bemerkungen:**

- Diejenigen von Ihnen, die ITET studieren, haben elektrische Schaltungen im letzten Semester in der Vorlesung Netzwerke und Schaltungen I kennengelernt und studieren sie jetzt noch gründlicher in der Vorlesung Netzwerke und Schaltungen II.
- Das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel) besagt, dass in einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist. (Siehe *Netzwerke und Schaltungen II*.) Da wir eine Reihenschaltung betrachten, ist die Stromstärke daher an jedem Punkt der Schaltung gleich. Es ist daher sinnvoll, von *der* Stromstärke des durch die Schaltung fließenden Stromes zu besprechen.
- Der freie Schwingkreis (a) entspricht dem Spezialfall des Schwingkreis mit Wechsellspannungsquelle, in dem die angelegte Spannung konstant gleich null ist. Um die Schwingungen des freien Schwingkreises zu beschreiben, reicht es daher, den Schwingkreis mit Wechsellspannungsquelle zu beschreiben.

- Zu Problem (ii): Mit der erzeugten Stromstärke meinen wir die nach einer Einschwingphase erzeugte Stromstärke. Wir betrachten die angelegte Spannung als ein Eingangssignal und die erzeugte Stromstärke als ein Ausgangssignal. Unser Ziel ist es also, das Ausgangssignal in Abhängigkeit vom Eingangssignal zu berechnen.

Wir werden Problem (ii) für eine angelegte Spannung lösen, die eine Kosinusfunktion der Zeit ist. (Siehe Beispiel 1.13, S. 30.) Wie wir sehen werden, erzwingt die Spannung in diesem Fall eine kosinusförmige Schwingung der Stromstärke mit der gleichen Frequenz.

Wir betrachten jetzt den Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle (b). Wir werden das Problem (ii) mittels der zwei folgenden Schritte lösen:

1. Mittels Gesetzen der Elektrotechnik leiten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Ladung  $Q$  des Kondensators her.
2. Wir lösen die GDG und erhalten  $Q$ . Die gesuchte Stromstärke ist die Zeitableitung von  $Q$ .

Schritt 1: Wir schreiben:

- $Q$  := Ladung des Kondensators
- $I$  := Stromstärke
- $U$  := angelegte elektrische Spannung
- $U_x$  := Spannungsabfall an  $x = C, R, L$ , also  $U_C$  := Spannungsabfall am Kondensator  $C$ , etc.
- $C$  := Kapazität des Kondensators
- $R$  := elektrischer Widerstand des Widerstands (Bauelement)
- $L$  := Induktivität der Spule

Es gelten die folgenden Gesetze der Elektrotechnik (siehe *Netzwerke und Schaltungen I und II*):

- Aus der Ladungserhaltung folgt, dass die Stromstärke die Zeitableitung der Ladung des Kondensators ist, also

$$I = \dot{Q}. \quad (1.6)$$

- Kondensatorformel:

$$Q = CU_C \quad (1.7)$$

Das folgt aus dem Gaußschen Gesetz der Elektrostatik. (Siehe *Elektromagnetische Felder und Wellen.*)

- ohmsches Gesetz:

$$U_R = RI \quad (1.8)$$

- Spulengleichung:

$$U_L = LI \quad (1.9)$$

Dieses Gesetz folgt aus dem Induktionsgesetz von Faraday und dem Ampèreschen Gesetz. (Siehe *Elektromagnetische Felder und Wellen.*)

- 2. Kirchhoffsche Gesetz = Maschenregel: Alle Teilspannungen einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu null. Daraus folgt, dass

$$U_L + U_R + U_C = U. \quad (1.10)$$

Indem wir (1.10, 1.7, 1.6, 1.8, 1.9) kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q &= U, \\ \text{also } \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q &= \frac{U}{L}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Wir erhalten also die GDG (1.4) für die Ladung  $f = Q$  mit  $a_0 = \frac{1}{CL}$  und  $a_1 = \frac{R}{L}$ . Somit haben wir Schritt 1 ausgeführt (Aufstellen einer GDG für  $Q$ ). Schritt 2 (Lösen der GDG) werden wir im Fall  $U \equiv 0$  in Proposition 1.9 in Abschnitt 1.2 ausführen und im Fall einer kosinusförmigen Spannung  $U$  in Abschnitt 1.4 (siehe (1.42), S. 31).  $\triangle$

**Bemerkung.** [Federschwinger und elektrischer Schwingkreis] Durch Vergleich der in den Beispielen 1.2 und 1.3 verwendeten physikalischen Gesetze sehen wir, dass ein freier Federschwinger und ein freier elektrischer Schwingkreis analog beschrieben werden können. Die physikalischen Größen der beiden Systeme entsprechen einander gemäss der folgenden Tabelle:

Auslenkung	$x$	$Q$	Ladung des Kondensators
Geschwindigkeit	$v$	$I$	Stromstärke
- Rückstellkraft	$-_0$	$U_C$	Spannung am Kondensator
- Reibungskraft	$-_R$	$U_R$	Spannung am Widerstand
gesamte Kraft		$U_L$	Spannung an der Spule
Federkonstante	$k$	$\frac{1}{C}$	Kehrwert der Kapazität des Kondensators
Dämpfungskonstante	$c$	$R$	Widerstand
Masse	$m$	$L$	Induktivität

(Ordnen Sie die in den Beispielen [1.2](#) und [1.3](#) gebrauchten physikalischen Gesetze einander zu!)

## 1.2 Linearität und Homogenität einer GDG, Superpositionsprinzip, Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, charakteristisches Polynom einer GDG

Eine GDG heisst *linear* g. d. w. in ihr die gesuchte Funktion und alle ihre Ableitungen nur zur ersten Potenz, also linear, auftreten (falls sie überhaupt auftreten). Die folgende Definition macht das präzise. Wir fixieren eine Funktion  $\varphi$  und betrachten die entsprechende GDG [\(1.1\)](#).

**Definition** (Linearität und Homogenität einer GDG). *Wir nennen die GDG für eine reellwertige Funktion linear g. d. w. es eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für jedes  $t \in I$  die Funktion  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto \varphi(t, x_0, \dots, x_n) + g(t)$  (reell-)linear ist. Wir definieren Linearität für eine GDG einer komplexwertigen Funktion analog.*

*Wir nehmen jetzt an, dass die GDG linear ist. Falls  $g$  wie oben konstant gleich 0 gewählt werden kann, dann heisst die GDG homogen, sonst inhomogen. Die Funktion  $g$  heisst die Inhomogenität (oder Quellterm) der GDG.*

**Bemerkungen.** • Definition aus der Vorlesung *Lineare Algebra* (ITET: 1. Semester, RW: 3. Semester): Eine Abbildung  $T : V \rightarrow W$  zwischen zwei reellen (komplexen) Vektorräumen heisst linear g. d. w. für alle  $v, v' \in V$  und  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{C}$ ) gilt

$$T(av) = aT(v), \quad T(v + v') = T(v) + T(v').$$

- Die Funktion  $g$  wie oben ist eindeutig bestimmt (falls sie existiert).

In dieser Vorlesung befassen wir uns vor allem mit linearen GDG. Diese sind im Allgemeinen einfacher zu behandeln als nichtlineare GDG.

**Beispiele.** [(nicht-)lineare GDG, Homogenität]

- Die GDG aus den Beispielen [1.1](#), [1.2](#) und [1.3](#) sind alle linear. Die Gleichungen [\(1.3\)](#)[\(1.4\)](#) (Beispiele [1.1\(ii\)](#) und [1.2](#)) sind homogen. Die Gleichungen [\(1.2\)](#)[\(1.11\)](#) (Beispiele [1.1\(i\)](#) und [1.3](#)) sind inhomogen.

- Die GDG

$$t\dot{f}(t) + t^2 f(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist linear.

- Die GDG erster Ordnung

$$\dot{f} = f^2$$

ist nichtlinear, da auf der rechten Seite die gesuchte Funktion  $f$  quadratisch vorkommt.

△

**Bemerkung 1.4.** [Linearität] Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Die GDG (1.1) ist linear.

(b) Es gibt Funktionen  $a_i, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n$ ), sodass die GDG gegeben ist durch

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) f^{(i)}(t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

(c) Es gibt eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass die Abbildung  $f \mapsto \varphi(\cdot, f, \dots, f^{(n)}) + g$  linear ist<sup>5</sup>

Die Implikation “(a)  $\implies$  (b)” folgt aus linearer Algebra. “(b)  $\implies$  (c)” folgt durch direktes Nachrechnen aus der Tatsache, dass Ableiten eine lineare Operation ist. (Überlegen Sie sich die Details!) △

Aus dieser Bemerkung folgt das Superpositionsprinzip. Um dieses zu formulieren, erinnern wir uns an das Folgende aus der linearen Algebra: Eine (endliche reelle) Linearkombination der Funktionen  $f_1, \dots, f_\ell$  ist eine Funktion der Form  $c_1 u_1 + \dots + c_\ell u_\ell$ , wobei  $c_1, \dots, c_\ell$  reelle Zahlen sind.

**Bemerkungen 1.5.** [Superpositionsprinzip]

- (i) Eine Version des *Superpositionsprinzips* besagt das Folgende<sup>6</sup> Sei  $\ell \in \mathbb{N}$  und für  $k = 1, \dots, \ell$  seien  $g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der GDG (1.12) mit  $g = g_k$  und  $c_k \in \mathbb{R}$ . Dann löst die Funktion  $f := \sum_{k=1}^{\ell} c_k f_k$  die GDG (1.12) mit  $g = \sum_{k=1}^{\ell} c_k g_k$ . Das Superpositionsprinzip folgt aus Bemerkung 1.4.

<sup>5</sup> $\varphi(\cdot, f, \dots, f^{(n)})$  bezeichnet die Funktion  $t \mapsto (t, f(t), \dots, f^{(n)}(t))$ .

<sup>6</sup>In der Physik wird der Term *Superpositionsprinzip* für die verwandte Eigenschaft verwendet, dass die Wirkung einer Linearkombination von Anregungen eines Systems die entsprechende Linearkombination der Wirkungen der Anregungen ist.

(ii) Insbesondere löst jede Linearkombination von Lösungen der homogenen GDG

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) f^{(i)}(t) = 0 \quad (1.13)$$

diese GDG ebenfalls.

Es gilt auch ein analoges Superpositionsprinzip für eine GDG für eine komplexwertige Funktion.

Der folgende Satz beschreibt die Lösungsmenge der homogenen GDG (1.13). Der Beweis der ersten zwei Teilaussagen beruht auf Bemerkung 1.5

**Satz 1.6** (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip). (i)  
Die Menge

$$Z := \{f \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mid f \text{ löst (1.13)}\}$$

ist ein komplexer Vektorraum.

(ii) Die Menge

$$Z_{\mathbb{R}} := \{f \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f \text{ löst (1.13)}\}$$

ist ein reeller Vektorraum.

Wir nehmen nun an, dass die Funktionen  $a_0, \dots, a_n$  stetig sind und dass  $a_n$  nirgends verschwindet.

(iii) Die (komplexe) Dimension von  $Z$  ist gegeben durch

$$\dim Z = n.$$

(iv) Falls  $a_0, \dots, a_n$  reellwertig sind, dann ist die (reelle) Dimension von  $Z_{\mathbb{R}}$  ist gegeben durch

$$\dim Z_{\mathbb{R}} = n.$$

**Beweis des Satzes 1.6:** (i) folgt aus den folgenden Tatsachen:

- $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  ist ein komplexer Vektorraum.
- $f \equiv 0 \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$
- Superpositionsprinzip, siehe Bemerkung 1.5

(ii) folgt analog.

Aussagen (iii) (iv) folgen aus [Tes12, Theorem 3.13, p. 87]. (Im Fall konstanter Koeffizientenfunktionen  $a_0, \dots, a_n$  stimmen diese Aussagen mit [Stra, Korollar 5.6.1, S. 108] überein.)  $\square$

**Bemerkung.** [Dimension des reellen Lösungsraums] Gemäss Satz 1.6(iii) ist die Dimension des Lösungsraums der homogenen GDG gleich dem Grad der GDG (1.13).

**Beispiele.** [Superpositionsprinzip]

- Der Lösungsraum der homogenen linearen GDG

$$\dot{f} - f = 0$$

ist

$$Z = \{F_c \mid c \in \mathbb{C}\}, \quad F_c(t) := ce^t$$

- Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{f} = f. \tag{1.14}$$

Diese Gleichung ist linear, da wir sie umschreiben können als

$$1 \cdot \ddot{f} + (-1) \cdot f = 0$$

und sie dann die Form (1.12) hat. (Die Koeffizienten 1 und  $-1$  sind (konstante) Funktionen von  $t$ .) Die Funktionen

$$f_1(t) := e^t, \quad f_2(t) := e^{-t}$$

lösen die GDG (1.14). Gemäss Bemerkung 1.5 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle reellen Zahlen  $a_1, a_2$  die Funktion

$$f := a_1 f_1 + a_2 f_2, \quad f(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t},$$

ebenfalls die GDG (1.14). Das folgt auch aus einer direkten Rechnung.

$\triangle$

**Bemerkung.** [Superpositionsprinzip] Für eine *nicht*lineare GDG gilt das Superpositionsprinzip im Allgemeinen nicht. Ein Beispiel dafür ist die GDG

$$\dot{f} = f^2. \tag{1.15}$$

Die Funktion

$$f(t) := -\frac{1}{t}$$

löst die Gleichung (1.15). (Rechnen Sie das nach!) Wenn  $a$  eine reelle Zahl ist, dann löst  $af$  die GDG (1.15) nur in den Fällen  $a = 0$  und  $a = 1$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (af)^2 &= a^2 f^2 \\ &= a^2 \dot{f} \quad (\text{da } f \text{ die GDG (1.15) löst}) \\ &= a(af)'. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich  $(af)'$ , wenn  $a = 0$  oder  $a = 1$  ist. Das bedeutet, dass  $af$  die GDG (1.15) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die GDG (1.15) nicht.  $\triangle$

Seien jetzt  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Wir betrachten die homogene lineare GDG  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$f^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)} = f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f = 0. \quad (1.16)$$

Um eine Lösung dieser GDG zu finden, machen wir den Ansatz

$$f(t) = f_\lambda(t) := e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.17)$$

Indem wir das in (1.16) einsetzen, erhalten wir

$$\left( \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \right) e^{\lambda t} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

**Definition** (charakteristisches Polynom). Wir definieren das charakteristische Polynom der GDG (1.16) als die Funktion

$$p(\lambda) := \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Wenn  $f$  die GDG (1.16) löst, dann gilt wegen (1.18) mit  $t = 0$  also insbesondere

$$0 = p(\lambda) e^{\lambda \cdot 0} = p(\lambda).$$

Umgekehrt löst für jede Nullstelle  $\lambda$  von  $p$  die Funktion  $f_\lambda$  (gegeben durch (1.17)) die GDG (1.16).

**Beispiel 1.7.** [charakteristisches Polynom, Lösungen der GDG] Das charakteristische Polynom der GDG

$$\ddot{f} - f = 0$$

ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ . Also lösen die Funktionen

$$f_1(t) = e^{1 \cdot t}, \quad f_{-1}(t) = e^{(-1) \cdot t}$$

die GDG (1.16).

Die Funktionen  $f_\lambda$  bilden eine Basis des Vektorraums der Lösungen der GDG, falls  $p$  nur einfache Nullstellen besitzt. Das folgt aus dem nächsten Satz, der die Lösungsmenge der GDG (1.16) beschreibt.

Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$  die Nullstellen<sup>7</sup> des zugehörigen charakteristischen Polynoms  $p$ , und für  $i = 1, \dots, \ell$  sei  $m_i$  die Vielfachheit von  $\lambda_i$ .

**Bemerkung.** Wir können  $p$  also als das folgende Produkt schreiben:

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} := (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}.$$

**Satz 1.8** (Basis für den Lösungsraum). *Die Funktionen*

$$f_{ik}(t) := t^k e^{\lambda_i t}, \quad 1 \leq i \leq \ell, 0 \leq k < m_i$$

*bilden eine Basis des komplexen Vektorraums*

$$Z := \{f \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mid f \text{ löst (1.16)}\}.$$

**Bemerkungen.** • Gemäss Satz 1.6 ist  $Z$  tatsächlich ein Vektorraum. Die Aussage des Satzes 1.8 ist daher sinnvoll.

• Eine Basis eines Vektorraums ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Satz 1.8 sagt also das folgende:

- Die Funktionen  $f_{ik}$  liegen in  $Z$ , d. h., sie lösen (1.16).
- Die Funktionen  $f_{ik}$  sind linear unabhängig.
- Jede Lösung der GDG (1.16) kann als eine Linearkombination der Funktionen  $f_{ik}$  geschrieben werden kann.

<sup>7</sup>Wir nehmen an, dass  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , falls  $i \neq j$ .

Somit beschreibt der Satz die Lösungsmenge der GDG vollständig.

**Beweis des Satzes 1.8:** Seien  $1 \leq i \leq \ell$  und  $0 \leq k < m_i$ . Wir zeigen, dass  $f_{ik} \in Z$ . Wir schreiben

$$D := \frac{d}{dt}, \quad D^k := D \circ \dots \circ D \text{ (} k \text{ Operatoren } D\text{)}, \quad p(D) := D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k.$$

**Behauptung.** *Es gilt*

$$p(D)f_{ik} = 0.$$

**Beweis der Behauptung:** [Stra, Beweis von Satz 5.6.3 i), S. 110]. Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass  $p(D) = \prod_i (D - \lambda_i \text{id})^{m_i}$ .  $\square$

Gemäss dieser Behauptung löst die Funktion  $f_{ik}$  also die GDG (1.16), d. h.,  $f_{ik} \in Z$ , wie behauptet.

Lineare Unabhängigkeit der  $f_{ik}$ : [Stra, Beweis von Satz 5.6.3 ii), S. 111].

Die Funktionen  $f_{ik}$  erzeugen  $Z$ : Das folgt aus der Tatsache, dass die  $f_{ik}$  linear unabhängig sind, und ihre Anzahl gleich der Dimension von  $Z$  ist. (Gemäss [Stra, Korollar 5.6.1, S. 108] ist diese Dimension gleich  $n$ .)

Das beweist den Satz 1.8  $\square$

**Bemerkung.** [Basis des Lösungsraums] Falls das charakteristische Polynom  $p$  nur einfache Nullstellen besitzt, dann bilden die Funktionen

$$f_{\lambda_i}(t) = e^{\lambda_i t}, \quad 1 \leq i \leq \ell$$

eine Basis des Lösungsraums  $Z$ . Das folgt unmittelbar aus Satz 1.8 und der Tatsache  $f_{\lambda_i} = f_{i0}$ .

**Beispiele.** • Wir betrachten die GDG

$$\ddot{f} - f = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser GDG ist  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Gemäss Beispiel 1.7 sind die Nullstellen dieses Polynoms gegeben durch  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ . Gemäss Satz 1.8 bilden die Funktionen

$$f_1(t) = e^t, \quad f_{-1}(t) = e^{-t}$$

daher eine Basis des Lösungsraums  $Z$  der GDG. Insbesondere hat die allgemeine Lösung der GDG also die Form

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

- Wir betrachten die GDG

$$\ddot{f} - 2\dot{f} + f = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser GDG ist  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ . Die einzige Nullstelle dieses Polynoms ist  $\lambda_1 = 1$ . Ihre Vielfachheit ist  $m_1 = 2$ . Gemäss Satz 1.8 bilden die Funktionen

$$f_{10}(t) = e^t, \quad f_{11}(t) = te^t$$

daher eine Basis des Lösungsraums  $Z$  der GDG. Insbesondere hat die allgemeine Lösung der GDG also die Form

$$f(t) = c_{10}e^t + c_{11}te^t, \quad \text{mit } c_{10}, c_{11} \in \mathbb{C}.$$

### 1.3 Homogene GDG zweiter Ordnung, freier gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir betrachten jetzt die GDG (1.16) im Fall  $n = 2$  mit  $a_0, a_1 \in [0, \infty)$ , also die homogene GDG

$$\ddot{f} + a_1\dot{f} + a_0f = 0. \tag{1.19}$$

Diese GDG beschreibt einen freien (gedämpften) *harmonischen Oszillator*. Beispiele dafür sind der freie Federschwinger (Beispiel 1.2) und der freie elektrische Schwingkreis (Beispiel 1.3(a)). Der Term  $\ddot{f}$  drückt die Beschleunigung der Grösse  $f$  aus. Der Term  $a_0f$  bewirkt eine Rückstellung des Systems in die Ruhelage. Der Term  $a_1\dot{f}$  bewirkt eine Dämpfung des Systems, also eine Abnahme der Amplitude der Schwingung.

**Bemerkung.** Ein *Oszillator* ist ein schwingungsfähiges System. *Harmonisch* bedeutet in diesem Kontext, dass für jedes  $t$  der Rückstellterm  $a_0f(t)$  linear von  $f(t)$  abhängt.

Wir definieren *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems* als

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} \in [0, \infty). \tag{1.20}$$

Das ist die Kreisfrequenz (= Winkelgeschwindigkeit) des ungedämpften Systems, welches durch die GDG

$$\ddot{f} + a_0f = 0$$

beschrieben wird. Das folgt aus einer Rechnung wie in Beispiel 1.2. Wir definieren den *Dämpfungskoeffizienten*

$$\delta := \frac{a_1}{2}.$$

Mit diesen Notationen wird die GDG (1.19) zur Gleichung

$$\ddot{f} + 2\delta\dot{f} + \omega_0^2f = 0. \tag{1.21}$$

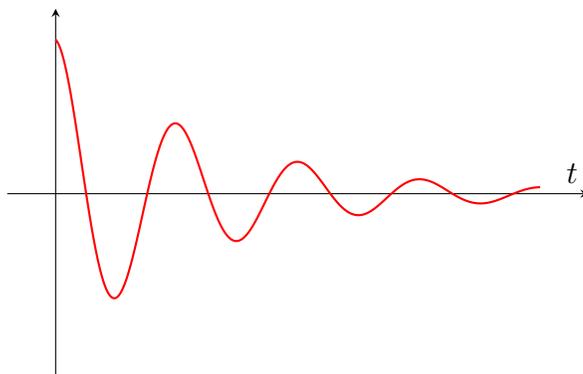


Abbildung 1.4: Die Lösung (1.22) für  $a = 1$ ,  $b = 0$  der GDG (1.21) im unterkritisch gedämpften Fall  $\delta < \omega_0$ .

Das nächste Resultat folgt aus Satz 1.8. Wir definieren

$$\mu := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Falls  $\delta < \omega_0$ , dann definieren wir die *Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung* als

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

**Proposition 1.9** (allgemeine Lösung der homogenen GDG zweiter Ordnung, freie gedämpfte Schwingung). *Die allgemeine reellwertige Lösung  $f$  der GDG (1.21) ist gegeben durch:*

(a) Fall  $\delta < \omega_0$  (unterkritische Dämpfung):

$$f(t) = e^{-\delta t} (a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t)), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.22)$$

(b) Fall  $\delta = \omega_0$  (kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall):

$$f(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Fall  $\delta > \omega_0$  (überkritische Dämpfung, Kriechfall):

$$f(t) = c_1 e^{(-\delta+\mu)t} + c_2 e^{(-\delta-\mu)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (1.23)$$

**Bemerkungen.** • Wir betrachten den Fall unterkritischer Dämpfung, also  $\delta < \omega_0$ . (Siehe Abbildung 1.4.) Die allgemeine Lösung  $f$  der GDG (1.21) ist dann das Produkt einer abfallenden Exponentialfunktion mit Abklingkonstante (= Abfallkonstante)  $\delta$  und einer sinusförmigen Funktion. Das rechtfertigt den Namen *Dämpfungskoeffizient* für  $\delta$ . Das System führt eine abklingende Schwingung mit

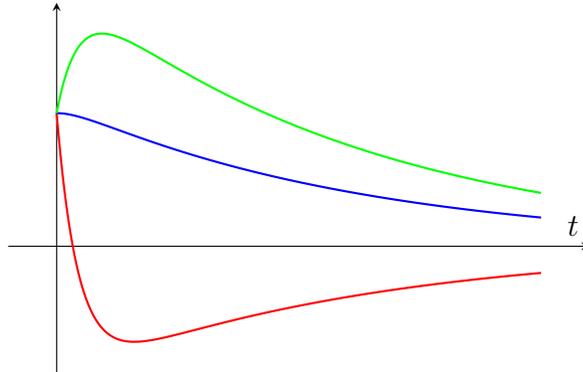


Abbildung 1.5: Die Lösung (1.23) der GDG (1.21) im überkritisch gedämpften Fall  $\delta > \omega_0$  für verschiedene Wahlen von  $c_1$  und  $c_2$ . Für die rote Lösung ist  $\dot{x}(0) < 0$ , für die blaue Lösung ist  $\dot{x}(0) = 0$  und für die grüne Lösung ist  $\dot{x}(0) > 0$ . Die rote Lösung geht einmal durch 0 hindurch, die anderen Lösungen bleiben positiv.

der Kreisfrequenz  $\omega_d$  aus, die kleiner als die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung ist. Die Bewegung des Systems ist also *gedämpft periodisch*<sup>8</sup>

- Wir betrachten jetzt den Fall überkritischer Dämpfung, also  $\delta > \omega_0$ . (Siehe Abbildung 1.5) Dann ist  $f$  eine Linearkombination zweier Exponentialfunktionen mit Abklingkonstanten  $\delta - \mu > 0$  und  $\delta + \mu > 0$ . Das System führt keine Schwingung aus. Die Funktion  $f$  geht maximal einmal durch Null hindurch.<sup>9</sup> Sie “kriecht” für grosse Zeiten zum Gleichgewichtszustand 0 zurück. Dieser Fall wird darum *Kriechfall* genannt. Die Bewegung des Systems ist also nicht (gedämpft) periodisch. Die zu starke Dämpfung verhindert Schwingungen.
- Wir betrachten den Fall kritischer Dämpfung,  $\delta = \omega_0$ . Das System führt keine Schwingung aus. Die Funktion  $f$  geht maximal einmal durch Null hindurch.<sup>10</sup> Sie “kriecht” für grosse Zeiten zum Gleichgewichtszustand 0 zurück.  $\delta = \omega_0$  ist der kleinste Wert von  $\delta$ , für den die Bewegung des Systems nicht gedämpft periodisch ist. Dieser Fall heisst darum *aperiodischer Grenzfall*.

**Beweis der Proposition 1.9:** Das charakteristische Polynom der GDG (1.21) ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2.$$

<sup>8</sup>Damit meinen wir, dass die Bewegung durch das Produkt einer abklingenden Exponentialfunktion und einer periodischen Funktion beschrieben wird.

<sup>9</sup>Wir nehmen hier an, dass  $c_1$  und  $c_2$  nicht beide gleich 0 sind.

<sup>10</sup>Wir nehmen hier an, dass  $c_1$  und  $c_2$  nicht beide gleich 0 sind.

Gemäss der Mitternachtsformel<sup>11</sup> sind seine Nullstellen gegeben durch

$$\lambda_{\pm} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \mu \in \mathbb{C}.$$

In den Fällen  $\delta > \omega_0$  und  $\delta = \omega_0$  folgt die Aussage von Proposition 1.9 daher aus Satz 1.8. Wir betrachten den Fall  $\delta < \omega_0$ . Wir haben

$$\lambda_{\pm} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_d.$$

Gemäss Satz 1.8 löst die Funktion

$$f_{\pm}(t) := e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-\delta t} e^{\pm i\omega_d t} = e^{-\delta t} (\cos(\omega_d t) \pm i \sin(\omega_d t))$$

daher die GDG (1.21). Daher löst die Funktion (1.22) die GDG.

Um zu zeigen, dass dies die *allgemeine* reellwertige Lösung ist, sei nun  $f$  eine solche Lösung. Gemäss Satz 1.8 erzeugen  $f_{\pm}$  den Lösungsraum  $Z$ . Daher existieren Zahlen  $c_{\pm} \in \mathbb{C}$ , sodass

$$f = c_- f_- + c_+ f_+.$$

Da  $f$  reellwertig ist, haben wir  $f = \bar{f}$ , daher

$$c_- e^{-i\omega_d t} + c_+ e^{i\omega_d t} = \overline{c_-} e^{i\omega_d t} + \overline{c_+} e^{-i\omega_d t},$$

daher  $c_- = \overline{c_+}$  und darum

$$f(t) = e^{-\delta t} (a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t)), \quad \text{wobei } a := 2 \operatorname{Re}(c_+), b := -2 \operatorname{Im}(c_+).$$

Das beweist Proposition 1.9.  $\square$

**Bemerkung.** [freier Federschwinger, freier elektrischer Schwingkreis] Proposition 1.9 liefert die allgemeine Lösung der GDG (1.5). Somit beschreibt sie die Bewegung eines freien Federschwingers. (Siehe Beispiel 1.2 und Übungsserie 1 (Federschwinger).) Des Weiteren liefert Proposition 1.9 die allgemeine Lösung der GDG 1.11 mit  $U \equiv 0$ . Somit beschreibt sie die Zeitentwicklung eines freien elektrischen Schwingkreises. (Siehe Beispiel 1.3(a).) Somit haben wir Problem (i) (S. 14) gelöst.

<sup>11</sup>Damit meinen wir die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung.

## 1.4 Inhomogene lineare GDG, Anwendung: elektrischer Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, erzwungene Schwingung

In diesem Abschnitt behandeln wir die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen GDG und beschreiben wir damit den elektrischen Schwingkreis mit kosinusförmiger Wechselspannungsquelle.

Wir betrachten die inhomogene lineare GDG (1.12), also

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) f^{(k)}(t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Die allgemeine Lösung dieser GDG ist die Summe einer festen partikulären Lösung der GDG und einer beliebigen Lösung der entsprechenden homogenen GDG

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) f^{(k)}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

**Bemerkungen 1.10.** [allgemeine Lösung der inhomogenen GDG]

(i) Für jede Lösung  $f_p \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  von (1.24) gilt:

$$\{f \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mid f \text{ löst (1.24)}\} = \{f_p + f_h \mid f_h \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : f_h \text{ löst (1.25)}\}.$$

Die Inklusion “ $\supseteq$ ” folgt aus dem Superpositionsprinzip, Bemerkung 1.5(i). (Überprüfen Sie, dass auch “ $\subseteq$ ” gilt!)

(ii) Das  $p$  in der Notation  $f_p$  steht für *partikulär*. Die Funktion  $f_p$  ist eine *partikuläre*, d. h., *spezielle* Lösung der GDG (1.24).

(iii) Es gilt auch die zu (i) analoge Aussage, die wir dadurch erhalten, dass wir  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{R}$  ersetzen.

**Bemerkung 1.11.** [partikuläre Lösung der inhomogenen GDG] Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_0, \dots, a_n, c, \alpha \in \mathbb{C}$  so, dass  $\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0 \neq 0$ . Dann löst die Funktion

$$F := F_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_p(t) := \frac{ce^{\alpha t}}{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} \quad (1.26)$$

die GDG

$$\sum_{k=0}^n a_k F^{(k)}(t) = a_n F^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{F}(t) + a_0 F(t) = ce^{\alpha t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

Das folgt durch mehrfaches Ableiten der Funktion  $F_p$  und Einsetzen in die GDG.

**Beispiel.** [allgemeine Lösung einer inhomogenen GDG] Wir betrachten die inhomogene GDG

$$\ddot{f}(t) + f(t) = e^{3t}. \quad (1.28)$$

Gemäss Bemerkung [1.11](#) löst die Funktion

$$f_p(t) := \frac{e^{3t}}{1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0} = \frac{e^{3t}}{10}$$

die GDG [\(1.28\)](#). Gemäss Proposition [1.9](#) ist die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen GDG  $\ddot{f} + f = 0$  gegeben durch

$$f_h(t) = a \cos(t) + b \sin(t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(Diese GDG ist unterkritisch gedämpft, d. h., Fall [\(a\)](#) trifft zu.) Gemäss Bemerkung [1.10\(iii\)](#) ist die Lösungsmenge von [\(1.28\)](#) daher gegeben durch

$$\left\{ f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f \text{ löst } \text{(1.28)} \right\} = \left\{ t \mapsto \frac{e^{3t}}{10} + a \cos(t) + b \sin(t) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene [\(1.27\)](#) im Fall  $n = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_0, a_1 \geq 0$  und  $g$  gegeben durch ein Vielfaches einer Kosinusfunktion.

**Bemerkung 1.12.** [partikuläre Lösung der inhomogenen GDG der Ordnung 2, mit kosinusförmiger Inhomogenität] Seien jetzt  $a_0, a_1, c, \omega \in [0, \infty)$ , sodass  $a_0 \neq \omega^2$  oder  $a_1\omega \neq 0$ . Wir betrachten die GDG

$$\ddot{f}(t) + a_1 \dot{f}(t) + a_0 f(t) = c \cos(\omega t). \quad (1.29)$$

Wir schreiben in Polarform

$$r e^{i\psi} := a_0 - \omega^2 + i a_1 \omega, \quad r \in (0, \infty), \psi \in [0, \pi]. \quad (1.30)$$

Wir haben

$$r = \sqrt{(a_0 - \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}. \quad (1.31)$$

Wir definieren die Funktion

$$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_p(t) := \frac{c}{r} \cos(\omega t - \psi). \quad (1.32)$$

Wir zeigen, dass diese Funktion die GDG [\(1.29\)](#) erfüllt. Wir definieren  $F_p$  wie in [\(1.26\)](#) mit  $a_2 = 1$  und  $\alpha = i\omega$ , also

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \frac{c e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i a_1 \omega + a_0} \\ &= \frac{c e^{i\omega t}}{r e^{i\psi}} \quad (\text{wegen } \text{(1.30)}) \\ &= \frac{c}{r} e^{i(\omega t - \psi)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$= \frac{c}{r} e^{i(\omega t - \psi)}. \quad (1.34)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{c}{r} \operatorname{Re} \left( e^{i(\omega t - \psi)} \right) \quad (\text{wegen der Eulerschen Formel } e^{ix} = \cos x + i \sin x) \\ &= \operatorname{Re}(F_p(t)) \quad (\text{wegen (1.34)}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Gemäss Bemerkung 1.11 löst  $F = F_p$  die GDG (1.27), also

$$\ddot{F}(t) + a_1 \dot{F}(t) + a_0 F(t) = ce^{i\omega t}.$$

Wegen (1.35) löst  $f = f_p$  daher die GDG

$$\ddot{f}(t) + a_1 \dot{f}(t) + a_0 f(t) = \operatorname{Re}(ce^{i\omega t}) = c \cos(\omega t),$$

also (1.29), wie behauptet. △

**Bemerkung.** [komplexe Zahlen] In Bemerkung 1.12 haben wir erfolgreich komplexe Zahlen und die Eulersche Formel verwendet, um eine reellwertige Lösung einer GDG mit reellen Koeffizienten zu bestimmen. Komplexe Zahlen können also auch in “reellen” Situationen nützlich sein.

Wir verwenden jetzt die allgemeine Lösung der inhomogenen GDG, um den elektrischen Schwingkreis mit kosinusförmiger Wechselspannungsquelle zu beschreiben. Wir führen jetzt also Schritt 2 (Beispiel 1.3) aus:

**Beispiel 1.13.** [Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, Lösung der GDG für die Ladung] Wir betrachten einen gedämpften elektrischen Reihenschwingkreis mit Wechselspannungsquelle, wie in Beispiel 1.3 unter (b). Wir nehmen an, dass die vorgegebene Spannung  $U$  eine Kosinusfunktion der Zeit ist, also

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t), \quad \text{wobei } U_0, \omega \in [0, \infty). \quad (1.36)$$

Die GDG (1.11) wird dann zur Gleichung

$$\left( \ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{CL} Q \right) (t) = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Die GDG (1.37) stimmt dann mit (1.29) überein, wobei

$$a_0 := \frac{1}{CL}, \quad a_1 := \frac{R}{L}, \quad c := \frac{U_0}{L}. \quad (1.38)$$

Wir definieren  $r, \psi$  durch (1.30),

$$Q_p := f_p$$

wie in (1.32), die *Phasenverschiebung* als

$$\varphi := \psi - \frac{\pi}{2} \quad (1.39)$$

und den *Scheinwiderstand* als

$$Z := Z_\omega := \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{C\omega} + L\omega\right)^2} \quad (1.40)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} I_p &:= \dot{Q}_p \\ &= -\frac{c}{r}\omega \sin(\omega t - \psi) \quad (\text{wegen (1.32)}) \\ &= U_0 \frac{\omega}{L\sqrt{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \\ &\quad (\text{wegen (1.31), (1.38), (1.39)} \text{ und } -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)) \\ &= \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{wegen (1.40)}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Gemäss Bemerkung (1.12) löst die Funktion  $Q_p$  die GDG (1.29), also die GDG (1.37). Die allgemeine Lösung der GDG ist gegeben durch

$$Q = Q_h + Q_p,$$

wobei  $Q_h$  die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung ist. (Warum?) Gemäss (1.6) ist die Stromstärke  $I$  gegeben durch

$$I = \dot{Q} = \dot{Q}_h + \dot{Q}_p = I_h + I_p, \quad \text{wobei } I_h := \dot{Q}_h.$$

Wir nehmen jetzt an, dass  $R > 0$ . Dann klingt  $I_h$  exponentiell ab. Daher ist  $I$  asymptotisch für nach unendlich gehende Zeit durch  $I_p$  gegeben. (In der Praxis bedeutet das, dass  $I$  nach einer Einschwingphase näherungsweise durch  $I_p$  gegeben ist.) Die angelegte Wechselspannung  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$  erzeugt im Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle gemäss (1.41) also (asymptotisch) die Stromstärke

$$I(t) = I_p(t) = \dot{Q}_p(t) = \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.42)$$

Somit haben wir Problem (ii) (S. 14) gelöst. △

**Bemerkungen.** [Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, Lösung der GDG]

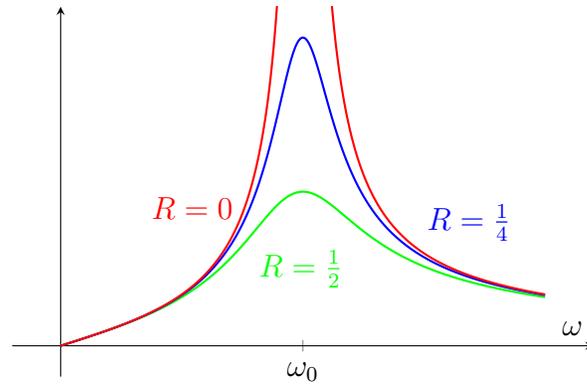


Abbildung 1.6: Amplitude  $A_\omega$  der Stromstärke in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  für verschiedene Werte von  $R$ .

- Gemäss (1.42) (1.36) ist die erzeugte Stromstärke im Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle gegeben durch die um den Winkel  $\varphi$  phasenverschobene Spannung  $U$  geteilt durch den Scheinwiderstand  $Z$ . Die Stromstärke führt also eine kosinusförmige Schwingung mit derselben Frequenz wie die angelegte Spannung aus, aber die Phasen unterscheiden sich. Bis auf eine Phasenverschiebung verhält sich ein solcher Schwingkreis also wie die Schaltung, die aus einem Widerstand besteht, der an eine Batterie geschaltet wird, wobei  $Z$  die Rolle des Widerstands spielt.
- Wir definieren die *Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems* wie in (1.20) als

$$\omega_0 := \sqrt{a_0} = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Das ist die Kreisfrequenz des *idealen* (= ungedämpften) freien Schwingkreises, der durch Beispiel 1.3(a) mit  $R = 0$  gegeben ist. (Das entspricht einem Schwingkreis, der nur aus einem Kondensator und einer Spule besteht, ohne einen Widerstand.) Im Fall  $R \neq 0$  und  $\omega = \omega_0$  ist  $\varphi$  gemäss (1.39) (1.30) gleich 0. Die Spannung und die Stromstärke sind dann also in Phase.

- Die *Amplitude der Stromstärke* ist durch

$$A_\omega := \frac{U_0}{Z_\omega}$$

gegeben. Siehe Abbildung 1.6. Die Amplitude ist genau dann maximal, wenn der Scheinwiderstand  $Z_\omega$  minimal ist. Das ist genau für

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

der Fall. (In diesem Fall ist die Klammer in (1.40) gleich null.) In diesem Fall ist das System in *Resonanz* mit der Anregung.

- Aus der Formel (1.40) folgt: Je mehr sich  $\omega$ , die Anregungsfrequenz, von  $\omega_0$ , der Eigenfrequenz des Schwingkreises, entfernt, desto kleiner wird die Amplitude  $A_\omega$ . Für  $\omega \rightarrow \infty$  und  $\omega \rightarrow 0$  konvergiert  $A_\omega$  gegen 0. Das Eingangssignal (die zeitabhängige Spannung  $U$ ) wird also abhängig von der Kreisfrequenz  $\omega$  in ein starkes oder schwaches Ausgangssignal (die zeitabhängige Stromstärke  $I$ ) umgewandelt. Der Schwingkreis wirkt darum näherungsweise wie ein Filter, der nur Frequenzen in der Nähe von  $\omega_0$  durchlässt. Diese Eigenschaft wird in Anwendungen genutzt.
- Aus der Formel (1.40) folgt: Je grösser der Widerstand  $R$ , desto kleiner ist die Amplitude. Der Widerstand hat also eine dämpfende Wirkung auf den Schwingkreis. Für  $R \rightarrow \infty$  konvergiert die Amplitude gegen 0. Im Fall  $\omega = \omega_0$  konvergiert sie für  $R \rightarrow 0$  gegen  $\infty$ . Tatsächlich wächst im Fall  $\omega = \omega_0$  und  $R = 0$  die Amplitude der Stromstärke linear mit der Zeit an. (In diesem Fall ist  $Q_p(t) := \frac{U_0}{2L\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$  eine partikuläre Lösung der GDG (1.37).) Sie wächst dann also ins Unermessliche. Es tritt daher die sogenannte *Resonanzkatastrophe* ein.

△

## 1.5 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme

In diesem Abschnitt betrachten wir *Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Ein solches System besteht aus mehreren Differentialgleichungen für mehrere Funktionen. Solche Systeme beschreiben die Wechselwirkung verschiedener physikalischer Grössen. Ein Beispiel dafür ist der elektrische Schwingkreis. Wir haben diesen mit Hilfe mehrerer Differentialgleichungen für verschiedene elektrische Grössen beschrieben. (Daraus haben wir dann eine einzelne GDG für die Ladung  $Q$  hergeleitet.) Jede GDG kann als ein System von GDG *erster Ordnung* umgeschrieben werden.

In Anwendungen beschreiben gewöhnliche Differentialgleichungen alleine ein physikalisches System meistens noch nicht vollständig. Das System wird jedoch oft vollständig beschrieben, wenn wir zusätzlich zur Differentialgleichung noch Anfangsbedingungen hinzunehmen. Diese Bedingungen werden oft durch den experimentellen Aufbau vorgegeben. Dadurch erhalten wir ein *Anfangswertproblem*. Für ein lineares System von GDG erster Ordnung existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Im

Fall konstanter Koeffizienten kann diese Lösung mittels Matrixexponentiation ausgedrückt werden.

Seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$  und  $I$  ein offenes Intervall.

**Definition.** Ein System von  $m$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für  $n$  Funktionen von  $I$  nach  $\mathbb{R}$  ist eine Gleichung für eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Form

$$\Phi(t, F(t), \dot{F}(t)) = 0, \quad \forall t \in I,$$

wobei  $\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine feste Funktion der Variablen  $t, X, Y$  ist, die nicht bezüglich  $Y$  konstant ist. Wir nennen ein solches System linear g. d. w. es eine Funktion  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, sodass für jedes  $t \in I$  die Funktion  $(X, Y) \mapsto \Phi(t, X, Y) + G(t)$  linear ist.

Analog definieren wir den Begriff eines Systems von GDG erster Ordnung für  $n$  Funktionen von  $I$  nach  $\mathbb{C}$  und Linearität eines solchen Systems.

Wir nehmen jetzt an, dass das System linear ist. Falls  $G$  wie oben konstant gleich 0 gewählt werden kann, dann heisst das System homogen, sonst inhomogen. Die Funktion  $G$  heisst die Inhomogenität (oder Quellterm) der GDG.

**Bemerkung.** Die Funktion  $G$  wie oben ist eindeutig bestimmt (falls sie existiert).

**Beispiel.** [mehrstufiger radioaktiver Zerfall] Wir betrachten eine radioaktive Substanz  $S_1$ , die über die Zwischenstufen  $S_2, \dots, S_{n-1}$  in eine stabile Substanz  $S_n$  zerfällt. Wir schreiben:

$f^i(t) :=$  Anzahl Atome der Substanz  $S_i$  zum Zeitpunkt  $t$  12

$a_i :=$  Zerfallskonstante der Substanz  $S_i$

Der mehrstufige Zerfall wird durch folgende GDG beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{f}^1 &= -a_1 f^1 \\ \dot{f}^2 &= a_1 f^1 - a_2 f^2 \\ &\vdots \\ \dot{f}^{n-1} &= a_{n-2} f^{n-2} - a_{n-1} f^{n-1} \\ \dot{f}^n &= a_{n-1} f^{n-1} \end{aligned} \tag{1.43}$$

---

<sup>12</sup>Im Zusammenhang mit Systemen von GDG verwenden wir einen oberen Index für die  $i$ -te gesuchte Funktion. Das stimmt mit der Konvention der Physik überein, einen oberen Index für die Komponenten eines Vektors zu verwenden. Wenn die Gefahr besteht, den oberen Index mit einer Potenz zu verwechseln, werden wir einen unteren Index verwenden.

Wir definieren

$$F := \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A := \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t, X, Y) := Y - AX.$$

Die GDG (1.43) entspricht dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi(t, F(t), \dot{F}(t)) &= 0, \quad \forall t, \\ \text{d. h.} \quad \dot{F} &= AF. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Dieses System von GDG ist homogen linear.

**Beispiel.** [System von GDG] Wir betrachten den elektrischen Schwingkreis mit Wechselspannungsquelle, siehe Beispiel 1.3. Wie wir gesehen haben, wird der Schwingkreis durch die Gleichungen (1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10) für die elektrischen Grössen  $Q, I, U_C, U_R, U_L$  beschrieben. Diese Gleichungen formen ein *inhomogenes* lineares System von GDG. Die Inhomogenität enthält die angelegte Spannung  $U$ .

**Bemerkung.** In diesem Beispiel enthalten 3 Gleichungen keine Ableitungen. Das ist gemäss unserer Definition eines Systems von GDG erlaubt. Gewisse Autoren/innen von Büchern schliessen solche Systeme jedoch aus.

Wir betrachten jetzt eine Funktion  $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  und die entsprechende GDG der Ordnung  $n$ ,

$$\varphi(t, f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \tag{1.45}$$

Wir können diese GDG als ein System von GDG *erster Ordnung* umschreiben:

**Bemerkungen 1.14.** [Umschreiben einer GDG als ein System erster Ordnung]

- (i) Wir schreiben einen Punkt  $X \in \mathbb{R}^n$  als  $X = (X^0, \dots, X^{n-1})$  und definieren die Funktion

$$\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(t, X, Y) := \begin{pmatrix} Y^0 - X^1 \\ Y^1 - X^2 \\ \vdots \\ Y^{n-2} - X^{n-1} \\ \varphi(t, X, Y^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Sei  $F = (F^0, \dots, F^{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $f := F^0$ .  $F$  ist differenzierbar und löst das System von GDG

$$\Phi(t, F(t), \dot{F}(t)) = 0, \quad \forall t \in I$$

genau dann, wenn die Funktion  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist, die Gleichheiten

$$f^{(k)} = F^k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

erfüllt und die GDG (1.45) löst.

(ii) Wir nennen eine GDG explizit, wenn sie die Form

$$f^{(n)} = \psi(\cdot, f, \dots, f^{(n-1)}), \quad \forall t \tag{1.46}$$

hat. Wir betrachten jetzt eine solche GDG. Wir schreiben

$$\mathbb{R}^{m \times n} := \{m \times n\text{-Matrix mit Einträgen in } \mathbb{R}\}.$$

Wir nehmen an, dass die GDG (1.46) linear ist. Dann gibt es Funktionen  $g, a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\psi(t, x^0, \dots, x^{n-1}) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^k + g(t), \quad \forall t.$$

Wir definieren die Funktionen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad G := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n. \tag{1.47}$$

Eine Funktion  $F = (F^0, \dots, F^{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist differenzierbar und löst das System von GDG

$$\dot{F} = AF + G$$

genau dann, wenn die Funktion  $f := F^0$   $n$ -mal differenzierbar ist, die Gleichheiten

$$f^{(k)} = F^k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

erfüllt und die explizite lineare GDG

$$f^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)f^{(k)} + g(t), \quad \forall t \in I,$$

löst. Wir haben somit eine explizite lineare GDG als ein explizites lineares System von GDG erster Ordnung umgeschrieben.

(iii) Es gelten auch zu den obigen Bemerkungen analoge Bemerkungen für GDG für komplexwertige Funktionen.

**Beispiel 1.15.** [Umschreiben] Wir können die explizite lineare GDG

$$\ddot{f} = -f$$

umschreiben als das System von GDG für die Funktion

$$F := \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

gegeben durch

$$\dot{F} = AF, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei  $I$  ein Intervall,  $t_0 \in I$ ,  $\Phi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion und  $F_0 \in \mathbb{R}^m$ . Das zugehörige *Anfangswertproblem* ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi(t, F(t), \dot{F}(t)) &= 0, & \forall t \in I, \\ F(t_0) &= F_0. \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Fall  $m = n$ .

**Satz 1.16** (Existenz- und Eindeutigkeit der globalen Lösung eines linearen Systems von GDG). *Seien  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen. Das Anfangswertproblem*

$$\dot{F} = A(t)F + G(t), \quad \forall t \in I, \tag{1.48}$$

$$F(t_0) = F_0. \tag{1.49}$$

*besitzt eine eindeutige Lösung  $F \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .*

**Beweis:** [Tes12] Theorem 3.9, p. 81]. Für den Fall, dass  $A$  konstant ist, siehe auch [Stra] Satz 5.6.1, S. 104].  $\square$

**Bemerkung.** Die in diesem Satz beschriebene Lösung ist *global* definiert, d. h. auf dem ganzen Intervall  $I$ .

Mit Hilfe der oben beschriebenen Reduktion einer GDG auf ein System von GDG erster Ordnung impliziert dieser Satz, dass jede lineare GDG eine eindeutige globale Lösung hat:

**Korollar 1.17** (Existenz- und Eindeutigkeit der globalen Lösung einer linearen GDG).  
Seien  $g, a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $f_0^0, \dots, f_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ . Das Anfangswertproblem

$$f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) f^{(k)} = g(t), \quad \forall t \in I, \quad (1.50)$$

$$f^{(k)}(t_0) = f_0^k, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (1.51)$$

besitzt eine eindeutige Lösung  $f \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

**Bemerkung.** Es gilt auch ein analoges Resultat für GDG für komplexwertige Funktionen.

**Beweis des Korollars 1.17: Existenz:** Wir definieren  $A$  und  $G$  wie in (1.47) und

$$F_0 := \begin{pmatrix} f_0^0 \\ \vdots \\ f_0^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Gemäss Satz 1.16 gibt es eine Lösung  $F = (F^0, \dots, F^{n-1}) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  des Anfangswertproblems (1.48, 1.49). Gemäss Bemerkung 1.14(ii) ist die Funktion  $f := F^0$   $n$ -mal differenzierbar, löst die GDG (1.50) und erfüllt

$$f^{(k)} = F^k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung (1.49) folgt daraus, dass

$$f^{(k)}(t_0) = f_0^k, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\},$$

d. h.,  $f$  erfüllt die Anfangsbedingungen (1.51). Da  $f$  die GDG (1.50) löst und  $f, \dots, f^{(n-1)}, a_0, \dots, a_{n-1}, g$  stetig sind, ist  $f$   $n$ -mal stetig differenzierbar. Das zeigt, dass ein  $f$  mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

Dass dieses  $f$  eindeutig ist, folgt mittels eines ähnlichen Arguments aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.16 und Bemerkung 1.14(ii). Das beweist Korollar 1.17  $\square$

**Beispiel 1.18.** Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= 0, \\ f(0) &= 1, \quad \dot{f}(0) = 0 \end{aligned}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$f = \cos.$$

Dass diese Funktion das Anfangswertproblem löst, folgt durch Nachrechnen. Dass es die einzige Lösung ist, folgt aus Korollar 1.17

**Bemerkungen.** Um die Lösung eines Anfangswertproblem für eine homogene lineare GDG mit konstanten Koeffizienten zu finden, können wir die folgende Strategie verwenden:

- Bestimme die allgemeine Lösung der GDG mittels Satz 1.8. Wir schreiben diese Lösung als eine Linearkombination der Basisfunktionen  $f_{ik}$ .
- Die Anfangsbedingungen liefern ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Linearkombination. Wir lösen dieses Gleichungssystem mit einer Methode aus der Vorlesung *Lineare Algebra* (zum Beispiel mit Gaußelimination).

Im reellen Fall mit  $n = 2$  können wir statt Satz 1.8 die Proposition 1.9 verwenden.

**Beispiel.** Wir verwenden diese Strategie, um die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= 0, \\ f(0) &= 1, \quad \dot{f}(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.52}$$

zu bestimmen. Gemäss Proposition 1.9 ist die allgemeine reellwertige Lösung der GDG  $\ddot{f} + f = 0$  gegeben durch

$$f = a \cos + b \sin, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(Wir sind im unterkritischen Fall (a).) Durch Einsetzen in (1.52) erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten  $a, b$ :

$$\begin{aligned} 1 &= f(0) = a \cos(0) + b \sin(0) = a, \\ 0 &= \dot{f}(0) = -a \sin(0) + b \cos(0) = b. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$f = 1 \cdot \cos + 0 \cdot \sin = \cos.$$

(Vergleiche mit Beispiel 1.18.)

Obwohl gemäss Korollar 1.17 das Anfangswertproblem für eine lineare GDG eine eindeutige Lösung besitzt, gibt es für gewisse dieser Lösungen keine explizite Formel, selbst wenn die GDG homogen ist. Um das zu präzisieren, sagen wir, dass eine Funktion einer (reellen) Veränderlichen *Liouville-Typ* hat (oder *eine explizite Formel zulässt*) g. d. w. wir sie in endlich vielen Schritten aus konstanten Funktionen und der Exponentialfunktion gewinnen können, indem wir die arithmetischen Operationen  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  anwenden, algebraische Gleichungen lösen<sup>13</sup> und Stammfunktionen<sup>14</sup> nehmen.

<sup>13</sup>wie zum Beispiel die Gleichung  $f(t)^5 + f(t) + t = 0$

<sup>14</sup>Eine Funktion  $F$  heisst Stammfunktion einer Funktion  $f$  genau dann, wenn die Ableitung von  $F$  gleich  $f$  ist.

**Beispiele.** [explizite Formel] Beispiele von Funktionen von Liouville-Typ sind Polynome, trigonometrische Funktionen wie zum Beispiel

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

und die Funktionen

$$f(x) := \sqrt{e^x + x}, \quad f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

**Beispiel.** [Lösung einer GDG ohne explizite Formel] Seien  $f_0^0, f_0^1 \in \mathbb{R}$ . Gemäss Korollar 1.17 besitzt das Anfangswertproblem

$$\ddot{f}(t) + tf(t) = 0, \quad f(0) = f_0^0, \quad \dot{f}(0) = f_0^1$$

eine eindeutige Lösung. Für gewisse Wahlen von  $f_0^0$  und  $f_0^1$  ist diese Lösung jedoch nicht vom Liouville-Typ, d. h., es gibt keine explizite Formel dafür. Das ist ein schwierig zu beweisender mathematischer Satz.

**Bemerkungen.** [explizite Formel, numerische Methoden]

- Im Gegensatz zum obigen Beispiel gibt es für die allgemeine Lösung einer homogenen linearen GDG mit konstanten Koeffizienten eine explizite Formel. Gemäss Satz 1.8 ist diese Lösung nämlich eine Linearkombination der Basisfunktionen  $f_{ik}(t) := t^k e^{\lambda_i t}$ .
- Wir können die Lösungen einer GDG mit Hilfe von numerischen Methoden beliebig genau berechnen, selbst, wenn es keine explizite Formel dafür gibt. Siehe das Fach *Numerische Methoden* (ITET, 4. Semester). Das Fach *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach) behandelt numerische Verfahren für partielle Differentialgleichungen (siehe Analysis 3).

**Bemerkung.** Korollar 1.17 besagt, dass das Anfangswertproblem für eine lineare GDG eine globale, d. h. für alle Zeiten definierte, Lösung besitzt. Für nichtlineare GDG ist das im Allgemeinen falsch. Zum Beispiel besitzt das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{f} = f^2, \quad f(0) = 1$$

keine globale Lösung. Das folgt aus der Tatsache, dass die Funktion

$$f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \frac{1}{1-t}$$

dieses Anfangswertproblem löst und dass je zwei Lösungen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. (Das ist die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf. Siehe [Stra] Satz 6.5.1, S. 145.) Intuitiv besitzt das AWP keine globale Lösung, weil die Lösung  $f(t) := \frac{1}{1-t}$  zur Zeit  $t = 1$  explodiert, d. h., gegen  $\infty$  geht.

Falls die matrixwertige Funktion  $A$  konstant ist und  $G = 0$ , dann können wir die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1.48 1.49) mittels Matrixexponentiation ausdrücken. Um diese Exponentiation zu erklären, brauchen wir das Folgende. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben die Diagonalmatrix mit diagonalen Einträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  als

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$  ist das die Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} := I_n := \text{diag}(1, \dots, 1).$$

**Bemerkung.** In [Stra] wird diese Matrix mit “id” bezeichnet. Ich verwende dafür  $\mathbb{1}$ , um einen Konflikt mit der Notation “id” für die Identitätsabbildung zu vermeiden.

Seien  $M, M_\ell \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , für  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Wir sagen, dass die Folge  $(M_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $M$  konvergiert g. d. w. für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Folge  $((M_\ell)_{ij})_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $M_{ij}$  konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$M = \lim_{\ell \rightarrow \infty} M_\ell.$$

**Definition** (Matrixexponential). Für jede Matrix  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definieren wir ihr (Matrix-)exponential als die Matrix

$$e^X := \text{Exp}(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{X^k}{k!}. \quad (1.53)$$

**Bemerkungen.** • Wir verwenden hier die Konvention

$$X^0 := \mathbb{1}, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- Mit Hilfe von [Stra, Beispiel 3.7.2, S. 42] kann gezeigt werden, dass der Limes in (1.53) existiert.

**Beispiel 1.19.** [Matrixexponential] Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Für die Diagonalmatrix

$$X := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ist das Exponential gegeben durch

$$e^X = \text{Exp}(X) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

(Rechnen Sie das nach!)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Definition** (Fundamentallösung). *Wir definieren die Fundamentallösung des Systems von GDG  $\dot{F} = AF$  als die matrixwertige Funktion*

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Phi(t) := \text{Exp}(At).$$

**Proposition 1.20** (Fundamentallösung). (i) *Die Funktion  $\Phi$  ist glatt, d. h. beliebig oft differenzierbar.*

(ii) *Die Ableitung von  $\Phi$  ist gegeben durch*

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung.** Im Fall  $n = 1$  können wir die  $1 \times 1$ -Matrix  $A$  mit ihrem einzigen Eintrag identifizieren. Die Fundamentallösung  $\Phi(t) = e^{At}$  ist dann die gewöhnliche Exponentialfunktion mit Wachstumskonstante  $A$ .

Die folgende Bemerkung werden wir im Beweis der Proposition [1.20](#) verwenden.

**Bemerkung 1.21.** [Ableitung einer Potenzreihe] Gemäss [\[Stra\]](#), Satz 5.4.2, S. 93] ist jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzgebiets differenzierbar mit Ableitung gegeben durch gliedweises Differenzieren. Der Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihe stimmt mit dem der ursprünglichen Potenzreihe überein. Das folgt aus dem Beweis von [\[Stra\]](#), Satz 5.4.2, S. 93]. Daraus folgt, dass die Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzgebiets glatt ist.

**Beweis der Proposition [1.20](#): Beweis von [\(i\)](#):** Seien  $i, j = 1, \dots, n$ . Wir schreiben

$$a_k := \left( \frac{A^k}{k!} \right)_j^i.$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi_j^i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(At)^k}{k!} \right)_j^i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \end{aligned} \tag{1.54}$$

ist eine Potenzreihe in  $t \in \mathbb{R}$ .<sup>15</sup> Da diese Potenzreihe für jedes  $t \in \mathbb{R}$  konvergiert, ist ihr Konvergenzbereich gleich  $\mathbb{R}$ . Gemäss Bemerkung [1.21](#) ist die Potenzreihe daher auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt. Das beweist [\(i\)](#).

<sup>15</sup>Diese Potenzreihe nimmt komplexe Werte an.

**Beweis von (ii):** Gemäss Bemerkung 1.21 ist die Ableitung der Potenzreihe (1.54) gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_j^i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k!} A^k \right)_j^i t^{k-1} \\ &= \left( A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (At)^{k-1} \right)_j^i \\ &= (A\Phi)_j^i(t).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t).$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\dot{\Phi}(t) = \Phi(t)A.$$

Das beweist (ii) und schliesst den Beweis der Proposition 1.20 ab.  $\square$

Sei  $F_0 \in \mathbb{C}^n$ . Wir definieren die Funktion

$$F := \Phi F_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

**Korollar 1.22** (Fundamentallösung). *Diese Funktion ist glatt und löst das Anfangswertproblem*

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = F_0.$$

**Beweis des Korollars 1.22:** Aus Proposition 1.20(i) folgt, dass  $F$  glatt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{d}{dt} (\Phi F_0) \\ &= \dot{\Phi} F_0 \\ &= A\Phi F_0 \quad (\text{gemäss Proposition 1.20(ii)}) \\ &= AF.\end{aligned}$$

Wir schreiben

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

für die  $n \times n$ -Nullmatrix. Es gilt  $\text{Exp}(\mathbb{0}) = \frac{\mathbb{0}^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{0}^k}{k!} = \frac{\mathbb{1}}{1} + \mathbb{0}$  und darum

$$F(0) = \text{Exp}(A \cdot 0)F_0 = \mathbb{1}F_0 = F_0.$$

Das beweist Korollar [1.22](#).  $\square$

Falls  $A$  diagonal ist, also die Form  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  hat, dann ist die Fundamentallösung des Systems von GDG  $\dot{F} = AF$  gemäss Beispiel [1.19](#) gegeben durch

$$\Phi(t) = \text{Exp}(At) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

In der allgemeinen Situation ist die Fundamentallösung mittels der Formel  $\Phi(t) = \text{Exp}(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$  mühsam zu berechnen. Falls  $A$  jedoch diagonalisierbar ist, dann können wir die Rechnung stark vereinfachen, indem wir sie auf den diagonalen Fall reduzieren. Siehe Korollar [1.24](#). Dieses Korollar folgt aus dem nächsten Resultat.

**Proposition 1.23** (Exponential einer mit einer Matrix konjugierten Matrix). *Seien  $M, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Matrizen, wobei  $T$  invertierbar ist. Es gilt*

$$\text{Exp}(TMT^{-1}) = T \text{Exp}(M)T^{-1}.$$

**Bemerkung.**  $TMT^{-1}$  heisst die mit  $T$  konjugierte Matrix  $M$ . Proposition [1.23](#) sagt, dass das Exponential der mit  $T$  konjugierten Matrix  $M$  das mit  $T$  konjugierte Exponential der Matrix  $M$  ist.

**Beweis der Proposition [1.23](#):** Es gilt

$$(TMT^{-1})^k = TMT^{-1}TMT^{-1} \dots TMT^{-1} = TM^kT^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \text{Exp}(TMT^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(TMT^{-1})^k}{k!} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(TMT^{-1})^k}{k!} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} T \left( \sum_{k=0}^{\ell} \frac{M^k}{k!} \right) T^{-1} \quad (\text{wegen } (1.55)) \\ &= T \left( \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{M^k}{k!} \right) T^{-1} \quad (\text{da Konjugieren mit } T \text{ stetig ist}) \\ &= T \text{Exp}(M)T^{-1} \quad (\text{gemäss der Definition } (1.53)). \end{aligned}$$

Das beweist Proposition [1.23](#).  $\square$

**Korollar 1.24** (Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix). *Sei  $A$  eine diagonalisierbare Matrix, d. h., es gibt eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , sodass*

$$A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T^{-1}.$$

*Dann ist die Fundamentallösung des Systems von GDG  $\dot{F} = AF$  gegeben durch*

$$\Phi(t) = \operatorname{Exp}(At) = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}.$$

**Bemerkung.** Dieses Korollar liefert eine einfache Formel für die Fundamentallösung im Falle einer diagonalisierbaren Matrix  $A$ .

**Beweis des Korollars 1.24:** Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}(At) &= \operatorname{Exp}(T \operatorname{diag}(\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t) T^{-1}) \\ &= T \operatorname{Exp}(\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t) T^{-1} \quad (\text{gemäß Proposition 1.23}) \\ &= T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1} \quad (\text{gemäß Beispiel 1.19}). \end{aligned}$$

Das beweist das Korollar 1.24.  $\square$

Um die Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix  $A$  zu berechnen, brauchen wir auch noch die folgende Proposition aus der linearen Algebra.

**Proposition 1.25** (Eigenwerte und -vektoren). *Seien  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $T_j$  für die  $j$ -te Spalte der Matrix  $T$ . Die Gleichheit*

$$A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T^{-1} \tag{1.56}$$

*gilt genau dann, wenn für jedes  $j = 1, \dots, n$  die Spalte  $T_j$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_j$  ist.*

**Beweis von Proposition 1.25:** Wir zeigen die Implikation “ $\Leftarrow$ ”. Wir nehmen an, dass für jedes  $j = 1, \dots, n$  die Spalte  $T_j$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_j$  ist. Dann gilt für jedes  $j$ , dass  $AT_j = T_j \lambda_j$  und darum dass

$$AT = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Daraus folgt die Gleichheit (1.56).

Die umgekehrte Implikation “ $\Rightarrow$ ” folgt aus einem ähnlichen Argument. Das beweist Proposition 1.25.  $\square$

Im nächsten Beispiel berechnen wir die Eigenwerte und -vektoren einer Matrix. Diese Berechnungen werden wir im Beispiel 1.27 verwenden.

**Beispiel 1.26.** [Erinnerung an *Lineare Algebra*: charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenwert und -vektor] Das charakteristische Polynom der Matrix  $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(\lambda \mathbf{1} - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1) \cdot (-1) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von  $A$ , d. h. die Nullstellen von  $p_A$ , sind

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2}, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1. \quad (1.57)$$

Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

sind Eigenvektoren zu  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

**Bemerkung.** [charakteristisches Polynom] In gewissen Büchern wird das charakteristische Polynom von  $A$  durch  $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbf{1})$  statt  $\det(\lambda \mathbf{1} - A)$  definiert. Dieses Polynom unterscheidet sich von der hier verwendeten Definition durch den Faktor  $(-1)^n$ . Die beiden Polynome haben die gleichen Nullstellen. Darum können wir sie beide verwenden, um die Eigenwerte von  $A$  zu bestimmen. Der Vorteil der hier verwendeten Definition ist, dass der Leitkoeffizient<sup>16</sup> gleich 1 ist.

**Beispiel 1.27.** [Fundamentallösung für eine diagonalisierbare Matrix] Mit Hilfe von Korollar 1.24 und Proposition 1.25 berechnen wir die Fundamentallösung für das lineare System von GDG  $\dot{F} = AF$  für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren  $\lambda_1, \lambda_2$  wie in (1.57) und  $v_1, v_2$  wie in (1.58). Die Matrix  $T := (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ist invertierbar. Aus Proposition 1.25 und Beispiel 1.26 folgt, dass die Gleichheit (1.56) gilt. Gemäss Korollar 1.24 gilt daher

$$\Phi(t) = \text{Exp}(At) = T \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{diag}(e^{3t}, e^t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

<sup>16</sup>Das ist der Koeffizient zur höchsten Potenz der Variablen, die im Polynom auftritt. Für das charakteristische Polynom ist diese Potenz gegeben durch  $\lambda^n$ .

# Kapitel 2

## Topologie, Stetigkeit

Dieses Kapitel entspricht [Stra] Kapitel 4]. Zum Teil repetieren wir hier Stoff aus Analysis 1. Ein zentraler Begriff dieses Kapitels ist die Stetigkeit einer Funktion mehrerer Veränderlicher. Anschaulich ist eine Funktion stetig, wenn sich ihre Werte nur wenig ändern, wenn das Argument sich ändert. Stetigkeit ist eine Voraussetzung vieler Sätze. Zum Beispiel ist jede stetige Funktion Riemann-integrierbar. (Siehe [Stra], Satz 6.2.2].)

Wir werden Stetigkeit mit Hilfe von Topologie charakterisieren. Die Topologie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit offenen Mengen befasst. Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  heisst offen, falls sie die Vereinigung von offenen Bällen (= offene Vollkugeln) ist. (Im eindimensionalen Fall ist ein offener Ball dasselbe wie ein offenes Intervall.) Eine auf einer offenen Menge definierte Funktion  $f$  ist genau dann stetig, wenn das Urbild unter  $f$  jeder offenen Menge wieder offen ist.

### 2.1 Abschluss einer Menge, Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit, Kompaktheit

Der Grenzwert einer Funktion ist in Punkten im Abschluss des Definitionsgebiets der Funktion definiert. Der Abschluss einer Menge besteht aus allen Limites von Folgen in der Menge:

**Definition 2.1** (Abschluss). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Der Abschluss von  $\Omega$  ist die Menge<sup>1</sup>

$$\bar{\Omega} := \text{clos}(\Omega) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \text{Folge in } \Omega : x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)\}^2$$

**Bemerkung 2.2.** [Abschluss] Es gilt:  $\bar{\Omega} \supseteq \Omega$ .

<sup>1</sup>Wir verwenden hier die Notation  $\{x \in X \mid P(x)\}$  für die Menge aller  $x$  in  $X$ , die die Bedingung  $P(x)$  erfüllen. Eine alternative Notation für diese Menge ist  $\{x \in X ; P(x)\}$ .

<sup>2</sup>Die Notation  $\text{clos}$  steht für *closure*.

**Beispiel.** [Abschluss] Für  $\Omega := ]0, 1]$  haben wir  $\overline{]0, 1]} = [0, 1]$ . Beweis: Gemäss Bemerkung 2.2 gilt:  $\overline{]0, 1]} \supseteq ]0, 1]$ . Die Folge  $x_k := \frac{1}{k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) liegt in  $\Omega$  und konvergiert gegen 0. Also gilt  $0 \in \overline{]0, 1]}$  und daher  $\overline{]0, 1]} \supseteq [0, 1]$ .

Um die umgekehrte Inklusion “ $\subseteq$ ” zu zeigen, sei  $x \in [0, 1]^c = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ . Dann gibt es keine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega = ]0, 1]$ , die gegen  $x$  konvergiert. (Überprüfen Sie das!) Daher gilt  $x \notin \overline{]0, 1]}$ . Daraus folgt, dass  $\overline{]0, 1]} \subseteq [0, 1]$ . (Warum?)

Um das nächste Beispiel zu formulieren, brauchen wir die folgende Definition. Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  und  $i \in \{1, \dots, d\}$  bezeichnen wir mit  $v_i$  die  $i$ -te Komponente von  $v$  und mit

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^d v_i^2}$$

die (euklidische) Norm von  $v$ . (Das ist die (euklidische) Länge von  $v$ .)

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und

$$r \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

**Definition 2.3** (offener und abgeschlossener Ball). *Wir definieren den offenen Ball (oder (Voll-)kugel) um  $x_0$  mit Radius  $r$  als die Menge aller Punkte in  $\mathbb{R}^d$ , die (euklidischen) Abstand zu  $x_0$  kleiner als  $r$  haben, d. h. als die Menge*

$$B_r(x_0) := B_r^d(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| < r\}. \quad (2.1)$$

*Wir definieren den abgeschlossenen Ball um  $x_0$  mit Radius  $r$  als die Menge*

$$\overline{B}_r(x_0) := \overline{B}_r^d(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| \leq r\}. \quad (2.2)$$

*Wir definieren den offenen Einheitsball (in  $\mathbb{R}^d$ ) als  $B_1^d(0)$  und den abgeschlossenen Einheitsball als  $\overline{B}_1^d(0)$ .*

**Bemerkungen.** [Fall  $r = 0$  und  $r = \infty$ ]

- Es gilt

$$B_0(x_0) = \emptyset, \quad \overline{B}_0(x_0) = \{x_0\}, \quad B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^d, \quad \overline{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^d.$$

Also ist  $\mathbb{R}^d$  sowohl ein offener als ein abgeschlossener Ball.

- Die Bedingungen  $\|x - x_0\| < \infty$  und  $\|x - x_0\| \leq \infty$  sind sinnvoll, obwohl  $\infty$  keine Zahl ist.

- Es gibt kein  $x \in \mathbb{R}^d$ , sodass  $\|x - x_0\| = r := \infty$ , d. h., diese Möglichkeit in der Definition von  $\overline{B}_\infty(x_0)$  “wird nicht ausgenutzt”.

**Beispiel 2.4.** [Abschluss] Der Abschluss des offenen Balles ist der abgeschlossene Ball, d. h.

$$\overline{B_r^d(x_0)} = \overline{B}_r^d(x_0).$$

Beweis: [Stra. Beispiel 4.1.2 iii), S. 52]

Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $x_0$  ein Punkt im Abschluss  $\overline{\Omega}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.5** (Konvergenz und Grenzwert einer Funktion). *Wir sagen, dass die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  <sup>3</sup>gegen  $a$  konvergiert  $g.$  d. w. für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt  $f(x_k) \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ).*

In diesem Fall nennen wir  $a$  den Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := a.$$

**Bemerkungen 2.6.** [Grenzwert]

- Der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$  ist wohldefiniert, d. h., eindeutig (falls er existiert).
- Falls  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvergiert und  $x_0 \in \Omega$ , dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Beispiele 2.7.** [Konvergenz und Grenzwert einer Funktion]

- Wir betrachten

$$\Omega := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{e^x - 1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert an der Stelle  $x_0 := 0$  gegen 1, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(Warum?)

---

<sup>3</sup>oder *im Punkt*  $x_0$  oder *schlichtweg in*  $x_0$

(ii) Wir betrachten

$$\Omega := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert an der Stelle  $x_0 := 0$  nicht.

Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.8** (Stetigkeit, stetige Erganzbarkeit). (i) Sei  $x_0 \in \Omega$ .  $f$  heiſst an der Stelle  $x_0$  4 stetig g. d. w.  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvergiert.

(ii)  $f$  heiſst stetig g. d. w.  $f$  an jeder Stelle seines Definitionsbereiches stetig ist.

(iii) Sei  $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ .  $f$  heiſst an der Stelle  $x_0$  stetig ergänzbar g. d. w.  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvergiert.

**Bemerkung.** [Stetigkeit] Falls  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  stetig ist, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Siehe Bemerkung 2.6(ii).

**Beispiele 2.9.** [Stetigkeit, stetige Erganzbarkeit]

(i) Jedes reelle Polynom  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Das folgt aus Stra Satz 3.3.2 i), ii)] (Konvergenz von Summen und Produkten von Folgen).

(ii) Jedes komplexe Polynom  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig. Das folgt analog zum obigen Beispiel.

(iii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig. Dass die Funktion an jeder Stelle  $x_0 \neq 0$  stetig ist, folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion (siehe Stra Beispiel 4.6.2 ii), S. 71]), der Identitätsfunktion  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{id}(x) := x$ , und Stra Satz 3.3.2 iii)] (Quotient konvergenter Folgen). Dass sie an der Stelle  $x_0 = 0$  stetig ist, folgt aus Beispiel 2.7(i).

---

<sup>4</sup>oder im Punkt  $y_0$  oder schlichtweg in  $y_0$

- (iv) Für jede Teilmenge  $S$  von  $\mathbb{R}$  definieren wir die *charakteristische Funktion von  $S$*  als

$$\chi_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_S(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in S \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion

$$f := \chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist an der Stelle  $x_0 = 0$  unstetig.

- (v) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{e^x - 1}{x}$$

ist an der Stelle  $x_0 := 0$  stetig ergänzbar, da sie dort gegen 1 konvergiert.

- (vi) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x}$$

ist an der Stelle  $x_0 := 0$  nicht stetig ergänzbar, da sie dort nicht konvergiert. (Vergleiche mit Beispiel 2.7(ii).)

Für weitere Beispiele siehe [Stra, Beispiel 4.1.3, S. 52]. Wie Sie in Analysis 1 gelernt haben, ist die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 2.10** (Verknüpfung stetiger Funktionen). *Seien  $d, n, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  und  $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  stetige Funktionen. Dann ist die Verknüpfung  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  stetig.*

Beweis: [Stra, Satz 4.2.1, S. 51].

**Beispiel.** Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := e^{(x^2)}$$

ist stetig, da sie die Verknüpfung der stetigen Funktionen  $f(x) := x^2$  und  $g := \exp$  ist.

Ein zentraler Begriff der Topologie ist *Kompaktheit*. Dieser Begriff ist zum Beispiel darum wichtig, weil jede auf einer kompakten Menge definierte stetige Funktion ihr Maximum annimmt. Der Kompaktheitsbegriff beruht auf dem Begriff eines Häufungspunktes, den Sie im eindimensionalen Fall in Analysis 1 kennengelernt haben und den wir jetzt für allgemeine Dimensionen einführen. Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ .

**Definition 2.11** (Häufungspunkt).  $x_0$  heisst Häufungspunkt von  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  g. d. w. eine unendliche Teilmenge  $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$  gibt, sodass die entsprechende Teilfolge<sup>6</sup> gegen  $x_0$  konvergiert.

**Beispiel.** Die Folge  $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt den Häufungspunkt  $x_0 := 1$ . Um das einzusehen, wählen wir  $\Lambda$  als die Menge der positiven geraden Zahlen. Die monotone Abzählung von  $\Lambda$  ist durch  $k_n := 2n$  gegeben. Die  $\Lambda$  entsprechende Teilfolge von  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist durch  $x_{k_n} = (-1)^{2n} = 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gegeben. Diese Teilfolge konvergiert gegen 1. Also ist  $x_0 = 1$  tatsächlich ein Häufungspunkt der Folge  $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Auf analoge Weise können wir zeigen, dass  $-1$  ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

Wir sind jetzt bereit für die Definition der Kompaktheit.

**Definition 2.12** ((Folgen-)Kompaktheit). Eine Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{R}^d$  heisst (folgen-)kompakt g. d. w. jede Folge in  $K$  einen Häufungspunkt in  $K$  besitzt.

**Beispiele.** [(Nicht-)Kompaktheit]

- Jedes beschränkte und abgeschlossene Intervall  $I$ <sup>6</sup> ist kompakt. Beweis: Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $I = [a, b]$ . Da die Folge beschränkt ist, besitzt sie gemäss dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Analysis 1, [Stra. Satz 3.4.1, S. 35]) eine Teilfolge, die gegen einen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  konvergiert.  $x_0$  ist also ein Häufungspunkt von  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Die Teilfolge entspricht einer Abzählung  $\mathbb{N} \ni n \mapsto k_n \in \Lambda$ , wobei  $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $x_{k_n} \geq a$ . Daher gilt  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} \geq a$ . Ein analoges Argument zeigt, dass  $x_0 \leq b$ . Daher liegt  $x_0$  in  $I = [a, b]$ . Daraus folgt, dass  $I$  kompakt ist.
- Das halb-offene Intervall  $I := ]0, 1] = (0, 1]$ <sup>7</sup> ist nicht kompakt. Die Folge  $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$  liegt nämlich in  $I$ , besitzt aber keinen Häufungspunkt in  $I$ . (Warum?) Aus einem ähnlichen Grund sind für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  die Intervalle  $]a, b] = (a, b]$ ,  $[a, b[ = [a, b)$ <sup>8</sup> und  $]a, b[ = (a, b)$ <sup>9</sup> nicht kompakt.
- Die Menge  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt. Die Folge  $(k)_{k \in \mathbb{N}}$  liegt nämlich in  $\mathbb{R}$ , besitzt aber keinen Häufungspunkt (in  $\mathbb{R}$ ). (Warum?)

<sup>5</sup>Diese Teilfolge ist gegeben durch  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $\mathbb{N} \ni n \mapsto k_n \in \mathbb{N}$  eine monotone Abzählung von  $\Lambda$  ist. Siehe [Stra. Definition 3.4.1, S. 34].

<sup>6</sup>Jedes solche Intervall hat die Form  $I = [a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a \leq b$ .

<sup>7</sup> $]a, b] = (a, b]$  ist die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , sodass  $a < x \leq b$ .

<sup>8</sup> $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

<sup>9</sup> $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Für weitere (Nicht-)Beispiele siehe [Stra] Beispiel 4.2.2. i)].

Wie erwähnt, nimmt jede stetige auf einer kompakter Menge definierte Funktion ihr Maximum an. Das folgt aus dem nächsten Satz. Der Satz enthält den Begriff des Bildes einer Menge unter einer Abbildung.

**Definition** (Bild). Seien  $X$  und  $Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $S$  eine Teilmenge von  $X$ . Wir definieren  $f(S)$ , das Bild von  $S$  unter  $f$ , als die Menge aller Werte, die  $f$  auf  $S$  annimmt, also

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}.$$

Wir definieren das Bild von  $f$  als

$$\text{im}(f) := f(X).$$

**Bemerkung.**  $\text{im}$  steht für *image*.

**Satz 2.13** (Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung). *Das Bild einer kompakten Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  unter einer stetigen Abbildung  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist kompakt.*

Beweis: [Stra] Satz 4.2.3, S. 58].

Sei  $X$  eine Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ein Punkt  $x_+ \in X$  heisst *Maximalstelle* von  $f$  g. d. w.

$$f(x_+) \geq f(x), \quad \forall x \in X.$$

Falls  $f$  eine Maximalstelle  $x_+$  besitzt, dann definieren wir das *Maximum* von  $f$  als

$$\max f := \max_{x \in X} f(x) := f(x_+).$$

In diesem Fall sagen wir auch, dass  $f$  ein *Maximum besitzt*.

**Bemerkung.** Das Maximum ist wohldefiniert, d. h., es hängt nicht von der Maximalstelle ab.

Analog definieren wir den Begriff einer *Minimalstelle* und die Sprechweise *ein Minimum besitzen*.

**Bemerkungen.** • Anstelle von “ $f$  besitzt ein Maximum” sagen wir auch “ $f$  nimmt ihr Maximum an” (und zwar im Punkt  $x_+$  wie oben). Bei dieser Sprechweise sind wir uns allerdings bewusst, dass dieses Maximum nur existiert, wenn es angenommen wird.

- Wie Sie in Analysis 1 gelernt haben, ist das Supremum

$$\sup A$$

einer Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  die kleinste obere Schranke von  $A$ . (Siehe [\[Stra\]](#) Satz 2.3.1. i), S. 17]. Das Supremum existiert immer. (Falls  $A$  leer ist, dann verwenden wir die Konvention  $\sup A = -\infty$ . Falls  $A$  nach oben unbeschränkt ist, dann verwenden wir die Konvention  $\sup A = \infty$ .) Wir definieren das Supremum einer Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  als das Supremum des Bildes von  $f$ , d. h.

$$\sup f := \sup_{x \in X} f(x) := \sup f(X).$$

Die Funktion  $f$  besitzt genau dann ein Maximum, wenn sie ihr Supremum annimmt, d. h., wenn es einen Punkt  $x_+ \in X$  gibt, sodass  $f(x_+) = \sup f$ . In diesem Fall ist das Supremum von  $f$  gleich dem Maximum von  $f$ ,  $\sup f = \max f$ .

- Analoge Bemerkungen gelten für das Infimum einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und einer Funktion.

**Korollar 2.14** (stetige Funktion auf kompakter Menge, Maximum, Minimum). *Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und nicht leer. Jede stetige reellwertige Funktion  $f$  auf  $K$  besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Um dieses Korollar zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma. Wir nennen eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  beschränkt g. d. w. sie nach oben und unten beschränkt ist. Das bedeutet, dass es eine Zahl  $C \in \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$|a| \leq C, \quad \forall a \in A.$$

**Lemma 2.15.** *Für jede nicht leere kompakte Teilmenge  $Q$  von  $\mathbb{R}$  gilt:*

(i)  $Q$  ist beschränkt.

(ii)  $\sup Q, \inf Q \in Q$

Beweis: S. [\[54\]](#)

**Beweis des Korollars [2.14](#):** Da  $K$  nicht leer ist, ist  $\text{im}(f) = f(K)$  nicht leer. Gemäss Satz [\[2.13\]](#) ist  $Q := \text{im}(f)$  kompakt. Gemäss Lemma [\[2.15\]](#) gilt daher

$$\sup \text{im}(f) \in \text{im}(f),$$

d. h., es gibt ein  $x_+ \in K$ , sodass

$$\sup \text{im}(f) = f(x_+).$$

Da  $\sup \operatorname{im}(f)$  eine obere Schranke für  $\operatorname{im}(f)$  ist, gilt für jedes  $x \in K$ , dass

$$f(x) \leq \sup \operatorname{im}(f), \quad \text{also} \quad f(x) \leq f(x_+).$$

Daher ist  $x_+$  eine Maximalstelle von  $f$ . Die Funktion  $f$  besitzt also ein Maximum.

Ein analoges Argument zeigt, dass  $f$  ein Minimum besitzt. Das beweist Korollar 2.14  $\square$

**Beweis des Lemmas 2.15:** Aussage (i): Es genügt, das Kontraponierte<sup>10</sup> der Implikation “kompakt  $\implies$  beschränkt” zu beweisen. Das ist die Aussage “nicht beschränkt  $\implies$  nicht kompakt”. Wir nehmen an, dass  $Q$  nicht beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $Q$ , sodass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $|a_k| \geq k$ . (Warum?) Jede Teilfolge dieser Folge ist unbeschränkt und konvergiert daher nicht. (Das folgt aus [Stra] Satz 3.5.1, S. 37.) Es gibt also eine Folge in  $Q$ , die keine in  $Q$  konvergente Teilfolge zulässt. Daher ist  $Q$  nicht kompakt. Das beweist “nicht beschränkt  $\implies$  nicht kompakt” und somit Aussage (i).

Aussage (ii): Aus (i) folgt, dass  $Q$  nach oben beschränkt ist. Daher ist das Supremum von  $Q$  endlich. Es gibt daher eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $Q$ , die gegen  $\sup Q$  konvergiert. (Überprüfen Sie das!) Da  $Q$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen einen Punkt  $a$  in  $Q$  konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert auch gegen  $\sup Q$ . Da der Limes einer Folge in  $\mathbb{R}$  eindeutig ist, folgt daraus, dass  $a = \sup Q$ . Also liegt  $\sup Q$  in  $Q$ , wie behauptet.

Ein analoges Argument zeigt, dass  $\inf Q \in Q$ . Das beweist (ii) und schliesst den Beweis des Lemmas 2.15 ab.  $\square$

## 2.2 Topologie, innerer Punkt, Inneres, Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Rand

Topologie befasst sich mit offenen und abgeschlossenen Mengen. Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  heisst offen g. d. w. sie die Vereinigung von offenen Bällen (= offene Vollkugeln) ist. Sie heisst abgeschlossen g. d. w. ihr Komplement offen ist. Eine auf einer offenen Menge definierte Funktion  $f$  ist genau dann stetig, wenn das Urbild unter  $f$  jeder offenen Menge wieder offen ist. Mit Hilfe von Topologie können wir Stetigkeit einer Funktion charakterisieren. Eine auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  definierte Funktion ist nämlich genau dann stetig, falls das Urbild jeder offenen Teilmenge unter der Funktion offen ist.

<sup>10</sup>Manchmal wird das Kontraponierte als die *Kontraposition* bezeichnet.

In diesem Abschnitt werden wir auch Kompaktheit mit Hilfe des topologischen Begriffs der Abgeschlossenheit charakterisieren. Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ist nämlich genau dann kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Wir bezeichnen mit  $B_r^d(x_0)$  den offenen Ball um  $x_0$  mit Radius  $r$ . (Siehe Definition [2.3](#).)

**Definition 2.16** (innerer Punkt, Inneres, Offenheit). (i) Ein Punkt  $x \in \Omega$  heisst innerer Punkt von  $\Omega$  g. d. w. es ein  $r \in (0, \infty)$  gibt, sodass

$$B_r^d(x) \subseteq \Omega.$$

Wir definieren  $\text{Int } \Omega$ , das Innere von  $\Omega$  (oder den offenen Kern von  $\Omega$ ), als die Menge aller ihrer inneren Punkte,

$$\text{Int } \Omega := \text{Int}(\Omega) := \Omega^\circ := \{\text{innerer Punkt von } \Omega\}.$$

(ii)  $\Omega$  heisst offen (in  $\mathbb{R}^d$ ) g. d. w. jeder Punkt von  $\Omega$  ein innerer Punkt ist.

**Bemerkungen.** • “Int” steht für *interior*.

- Das Innere von  $\Omega$  ist in  $\Omega$  enthalten,

$$\text{Int } \Omega \subseteq \Omega.$$

**Beispiele 2.17.** [innerer Punkt, Inneres, Offenheit]

(i) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und  $R \in [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ .

**Behauptung:** Jeder Punkt des offenen Balles  $\Omega := B_R^d(x_0)$  ist ein innerer Punkt. Das Innere des offenen Balles ist daher der offene Ball, und der offene Ball ist offen. Das rechtfertigt den Namen “offener Ball”. Insbesondere ist  $\mathbb{R}^d = B_\infty^d(0)$  offen.

**Beweis der Behauptung:** Sei  $x \in \Omega = B_R^d(x_0)$ . Wir setzen  $r := R - \|x - x_0\|$ . Für jedes  $y \in B_r^d(x)$  gilt gemäss der Dreiecksungleichung<sup>11</sup>

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r + \|x - x_0\| = R.$$

Daher liegt  $y$  in  $\Omega = B_R^d(x_0)$ . Also ist  $B_r^d(x)$  in  $\Omega$  enthalten und daher  $x$  ein innerer Punkt von  $\Omega$ , wie behauptet.

(ii) Jedes offene Intervall  $I$  ist offen, da es um jeden Punkt in  $I$  einen offenen Ball gibt, der in  $I$  enthalten ist. (Warum?)

<sup>11</sup>Die Aussagen gelten auch im Fall  $R = \infty$ .

(iii) Das Innere des abgeschlossenen Balles ist der offene Ball, genauer

$$\text{Int}(\overline{B}_R(x_0)) = B_R^d(x_0).$$

(Siehe Übungsserie 4 (Inneres).)

(iv) Seien  $a < b$  reelle Zahlen. Wir betrachten das halb-offene Intervall  $\Omega := [a, b[$ . Gemäss (ii) ist jeder Punkt im offenen Intervall  $]a, b[$  ein innerer Punkt von  $]a, b[$  und daher ein innerer Punkt von  $\Omega = [a, b[$ . Andererseits ist  $x_0 := a$  kein innerer Punkt von  $\Omega$ . (Warum?) Das halb-offene Intervall  $[a, b[$  ist daher nicht offen. Wir haben gezeigt, dass das Innere des halb-offenen Intervalls  $\Omega = [a, b[$  das offene Intervall  $]a, b[$  ist,

$$\text{Int}[a, b[ = ]a, b[.$$

(v) Jedes nicht leere beschränkte abgeschlossene Intervall ist nicht offen, da keiner der Randpunkte ein innerer Punkt ist. Insbesondere ist für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Einpunktmenge  $\{x_0\}$  nicht offen.

**Bemerkung.** Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ist offen g. d. w. sie die Vereinigung von offenen Bällen<sup>12</sup> ist. Die Implikation “offen  $\iff$  Vereinigung ...” folgt aus Beispiel 2.17(i). (Überprüfen Sie das!)

Der folgende Satz fasst wichtige Eigenschaften von offenen Mengen zusammen.

**Satz 2.18** (Eigenschaften offener Mengen). *Es gilt:*

(i)  $\emptyset, \mathbb{R}^d$  sind offen in  $\mathbb{R}^d$ .

(ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

(iii) Jede Vereinigung offener Mengen<sup>13</sup> ist offen.

Beweis: [Stra, Satz 4.3.1, S. 59]

**Beispiele.** • Wir definieren den “offenen Halbmond”  $\Omega$  als den Durchschnitt des offenen Einheitsballes in  $\mathbb{R}^2$  und der offenen rechten Halbebene, also

$$\Omega := B_1^2(0) \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}).$$

(Zeichnen Sie diese Menge!) Gemäss Satz 2.18(ii) ist der “offene Halbmond” offen.

<sup>12</sup>Damit meinen wir die Vereinigungsmenge einer beliebigen Kollektion (= Menge) von offenen Bällen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

<sup>13</sup>Siehe Fussnote 12

- Gemäss Satz 2.18(iii) und Beispiel 2.17(ii) sind die Mengen

$$]0, 1[ \cup ]2, 4[, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} ]i, i + 1[, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \left] \frac{1}{2^i}, \frac{3}{2^{i+1}} \right[$$

offen. (Zeichnen Sie diese Mengen!)

**Bemerkung.** Die Aussage (ii) des Satzes 2.18 ohne das Wort *endlich* ist falsch. D. h., der Durchschnitt unendlich vieler offener Teilmengen ist im Allgemeinen *nicht* offen. Zum Beispiel gilt

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{k}}^d(0) = \{0\}.$$

Diese Menge ist gemäss Beispiel 2.17(v) nicht offen.

Als Nächstes behandeln wir den topologischen Begriff einer abgeschlossenen Menge. Dieser Begriff ist zum Beispiel darum wichtig, da eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  genau dann kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist. (Siehe Satz 2.27 auf S. 62.)

**Definition 2.19** (Abgeschlossenheit). *Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  heisst abgeschlossen (in  $\mathbb{R}^d$ ) g. d. w. ihr Komplement  $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$  offen ist.*

**Beispiele 2.20.** [(Nicht-)Abgeschlossenheit]

- Jedes abgeschlossene Intervall ist abgeschlossen. Sei  $I$  zum Beispiel ein nicht leeres beschränktes abgeschlossenes Intervall, d. h.,  $I = [a, b]$  mit  $a \leq b$ . Das Komplement von  $I$  ist  $I^c = ]-\infty, a[ \cup ]b, \infty[$ , also die Vereinigung zweier offener Intervalle. Gemäss Satz 2.18(iii) ist diese Vereinigung offen. Also ist  $I$  abgeschlossen. Für unbeschränktes abgeschlossenes Intervall folgt Abgeschlossenheit aus einem ähnlichen Argument.
- Jeder abgeschlossene Ball<sup>14</sup> ist abgeschlossen. Das folgt aus der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm. Siehe Übungserie 4 (Abgeschlossener Ball ist abgeschlossen).
- Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Das offene Intervall  $]a, b[$  und die halb-offenen Intervalle  $[a, b[$  und  $]a, b]$  sind nicht abgeschlossen. (Warum?)

Aus Satz 2.18 folgt das nächste Korollar, das Analoges für abgeschlossene Mengen aussagt.

**Korollar 2.21** (Eigenschaften abgeschlossener Mengen). *Es gilt:*

<sup>14</sup>Siehe Definition 2.3

(i)  $\emptyset, \mathbb{R}^d$  sind abgeschlossen in  $\mathbb{R}^d$ .

(ii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(iii) Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen<sup>15</sup> ist abgeschlossen.

**Bemerkung.** Aussage (ii) ohne das Wort *endlich* ist falsch. D. h., die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Teilmengen ist im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen. Es ist sogar so, dass jede Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ist, da

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\}.$$

(Die Einpunktmenge  $\{x\}$  ist abgeschlossen.)

**Bemerkungen.** [Unterschied zwischen Teilmengen und Türen] Gemäss Satz 2.18(i) und Korollar 2.21(i) sind die leere Menge und der ganze Raum  $\mathbb{R}^d$  sowohl offen als auch abgeschlossen. Andererseits gibt es Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$ , die weder offen noch abgeschlossen sind, zum Beispiel halboffene Intervalle. (Siehe Beispiele 2.17(iv) und 2.20(iii)).

Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  sind also keine Türen. Ein Tür ist nämlich entweder offen oder abgeschlossen. Eine Teilmenge dagegen kann offen, abgeschlossen, beides oder keines von beiden sein.

**Beweis von Korollar 2.21:** Für  $n = i, ii, iii$  folgt Aussage (n) aus Satz 2.18(n), indem wir das Komplement betrachten und die de Morganschen Regeln anwenden. Details des Beweises von (i,iii): Siehe Übungsserie 4.

Details des Beweises von (ii): Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^d$  abgeschlossene Mengen. Gemäss Definition sind dann die Mengen  $A_1^c, \dots, A_k^c$  offen. Gemäss Satz 2.18(ii) ist daher der Durchschnitt  $A_1^c \cap \dots \cap A_k^c$  offen. Gemäss einer de Morganschen Regel<sup>16</sup> gilt

$$(A_1 \cup \dots \cup A_k)^c = A_1^c \cap \dots \cap A_k^c.$$

Da diese Menge offen ist, ist  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  abgeschlossen. Das beweist (ii).  $\square$

Der folgende Satz charakterisiert Abgeschlossenheit.

**Satz 2.22** (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit). *Für jede Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  sind äquivalent:*

<sup>15</sup>Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

<sup>16</sup>Siehe Übungsserie 4.

(a)  $\Omega$  ist abgeschlossen.

(b) (Folgenabgeschlossenheit) Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in  $A$  liegt wiederum in  $A$ , d. h.

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \Omega : x_k \rightarrow x_0 (k \rightarrow \infty) \implies x_0 \in \Omega.$$

Beweis: [Stra] Satz 4.3.5, S. 62]

**Beispiel.** Das halb-offene Intervall  $\Omega := ]0, 1]$  ist nicht abgeschlossen.

**Beweis:** Das Kontraponierte der Implikation  $(a) \implies (b)$  ist  $\neg(b) \implies \neg(a)$ . Gemäss Satz 2.22 gilt diese Aussage. Die Folge  $x_k := \frac{1}{k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) liegt in  $\Omega = ]0, 1]$ , aber ihr Grenzwert  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  liegt nicht in  $\Omega$ . Daher ist die Bedingung  $(b)$  nicht erfüllt. Da  $\neg(b) \implies \neg(a)$ , folgt, dass  $(a)$  nicht erfüllt ist, also, dass  $\Omega = ]0, 1]$  nicht abgeschlossen ist, wie behauptet.

Der folgende Satz beschreibt das Innere und den Abschluss einer Menge mittels offener und abgeschlossener Mengen.

**Satz 2.23** (Charakterisierung des Inneren und des Abschlusses). Für jede Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  gilt:

(i) Das Innere von  $\Omega$  ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $\Omega$ ,

$$\text{Int } \Omega = \Omega^\circ = \bigcup_{U \subseteq \Omega: U \text{ offen}} U.$$

(ii) Der Abschluss von  $\Omega$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von  $\Omega$  <sup>17</sup>,

$$\bar{\Omega} = \bigcap_{A \supseteq \Omega: A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen}} A.$$

**Beweis von Satz 2.23:** (i) folgt aus Definition 2.16 (innerer Punkt, Offenheit).

(ii): [Stra] Satz 4.3.3, S. 61]  $\square$

**Bemerkungen.** • Gemäss Satz 2.23(i) ist das Innere einer Menge  $\Omega$  eine Vereinigung offener Mengen. Gemäss Satz 2.18(iii) ist das Innere von  $\Omega$  daher offen. Wegen Satz 2.23(i) ist das Innere von  $\Omega$  die grösste offene Menge  $U$ , die in  $\Omega$  enthalten ist.

<sup>17</sup>Eine Obermenge von  $\Omega$  ist eine Menge, die  $\Omega$  als Teilmenge enthält.

- Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie mit ihrem Innern übereinstimmt.
- Gemäss Satz 2.23(ii) ist der Abschluss einer Menge  $\Omega$  ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen. Gemäss Korollar 2.21(iii) ist der Abschluss von  $\Omega$  daher abgeschlossen. Wegen Satz 2.23(ii) ist der Abschluss von  $\Omega$  die *kleinste* abgeschlossene Menge  $A$ , die  $\Omega$  enthält.
- Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Im Integralsatz von Gauß, den wir in dieser Vorlesung behandeln werden, kommt ein Integral über den Rand eines Gebietes vor. Anschaulich ist der Rand die Begrenzung des Gebietes. Die nächste Definition macht diesen Begriff präzise. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Definition 2.24** ((topologischer) Rand). *Wir definieren  $\partial\Omega$ , den (topologischen) Rand von  $\Omega$  als das Komplement des Inneren von  $\Omega$  im Abschluss von  $\Omega$ ,*

$$\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \text{Int } \Omega.$$

**Bemerkungen.** Das Zeichen  $\partial$  ist ein geschwungenes  $d$ . Es wird “del” ausgesprochen, in Anlehnung an den griechischen Buchstaben  $\delta$  (delta). Es steht für den letzten Buchstaben im Wort *Rand*.

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und  $r \in (0, \infty)$ . Wir definieren  $S_r^{d-1}(x_0)$ , die Sphäre mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r$ , als die Menge aller Punkte in  $\mathbb{R}^d$ , die Abstand  $r$  zu  $x_0$  haben,

$$S_r^{d-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| = r\}. \quad (2.3)$$

**Beispiel.** [Rand] Der Rand des offenen Balles ist die Sphäre, genauer

$$\partial B_r^d(x_0) = \bar{B}_r^d(x_0) \setminus B_r^d(x_0) = S_r^{d-1}(x_0).$$

Das folgt aus Definition 2.24 und den Beispielen 2.4 und 2.17(i).

Der Rand des *abgeschlossenen* Balles ist ebenfalls die Sphäre, genauer

$$\partial \bar{B}_r^d(x_0) = \bar{B}_r^d(x_0) \setminus B_r^d(x_0) = S_r^{d-1}(x_0). \quad (2.4)$$

Aus der Definition 2.1 (Abschluss) oder Beispiel 2.20(ii) folgt nämlich, dass  $\bar{B}_r^d(x_0)$  sein eigener Abschluss ist. Mittels Beispiel 2.17(iii) folgt daraus (2.4).

**Bemerkung.** Der Rand einer Menge  $\Omega$  ist abgeschlossen, da

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \text{Int } \Omega = \bar{\Omega} \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$$

und gemäss Korollar 2.21(iii) die rechte Seite abgeschlossen ist.

Der folgende Satz charakterisiert den Rand einer Menge.

**Satz 2.25** (Charakterisierung des Randes). *Der Rand einer Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ist die Menge aller Punkte  $x$ , für die jeder Ball um  $x$  sowohl  $\Omega$  als auch das Komplement von  $\Omega$  schneidet, also*

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall r \in (0, \infty) : B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \neq B_r(x) \setminus \Omega\}.$$

Beweis: [Stra] Satz 4.3.4, S. 62].

Der nächste Satz charakterisiert (Folgen-)Kompaktheit (Definition 2.12). Wir brauchen dazu die folgende Definition.

**Definition 2.26** (Beschränktheit). *Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  heisst beschränkt g. d. w. sie in einem abgeschlossenen Ball enthalten ist, der nicht ganz  $\mathbb{R}^d$  ist.*

**Satz 2.27** (kompakt  $\iff$  abgeschlossen und beschränkt). *Für jede Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  sind äquivalent:*

- (a)  $K$  ist (folgen-)kompakt.
- (b)  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis: [Stra] Satz 4.3.6, S. 63]

**Beispiele.** [(Nicht-)Kompaktheit]

- Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und  $r \in (0, \infty)$ . Der abgeschlossene Ball  $\overline{B}_r^d(x_0)$  ist gemäss Beispiel 2.20(ii) abgeschlossen. Da er auch beschränkt ist, ist er gemäss Satz 2.27 kompakt.
- Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Das offene Intervall  $]a, b[$  und die halb-offenen Intervalle  $[a, b[$  und  $]a, b]$  sind nicht kompakt, da sie gemäss Beispiel 2.20(iii) nicht abgeschlossen sind.
- Die Menge  $\mathbb{R}^n$  ist nicht kompakt, da sie nicht beschränkt ist.

## 2.3 Topologisches Kriterium für Stetigkeit

In diesem Abschnitt charakterisieren wir Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe von offenen und abgeschlossenen Mengen. Wir charakterisieren auch Stetigkeit an einer Stelle. Dazu brauchen wir den Begriff einer Umgebung eines Punktes.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Definition 2.28** (relative Offen- und Abgeschlossenheit). (i) Eine Teilmenge  $U \subseteq \Omega$  heisst relativ offen in  $\Omega$  (oder schlichtweg offen in  $\Omega$  oder relativ offen) g. d. w. es eine offene Teilmenge  $\tilde{U}$  von  $\mathbb{R}^d$  gibt, sodass  $U = \tilde{U} \cap \Omega$ .

(ii) Eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heisst relativ abgeschlossen in  $\Omega$  <sup>18</sup> g. d. w. es eine abgeschlossene Teilmenge  $\tilde{A}$  von  $\mathbb{R}^d$  gibt, sodass  $A = \tilde{A} \cap \Omega$ .

**Beispiele.** • Sei  $\Omega := [0, 2)$ . Die Menge  $U := [0, 1)$  ist (relativ) offen in  $\Omega$ . (Wie können wir  $\tilde{U}$  wählen?) Die Menge  $A := [1, 2)$  ist (relativ) abgeschlossen in  $\Omega$ . (Wie können wir  $\tilde{A}$  wählen?)

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Satz 2.29** (Charakterisierung von Stetigkeit mittels offener und abgeschlossener Mengen). Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(a)  $f$  ist stetig (in jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$ ).

(b) Das Urbild  $U = f^{-1}(V)$  jeder offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist offen in  $\Omega$ .

(c) Das Urbild  $A = f^{-1}(B)$  jeder abgeschlossenen Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen in  $\Omega$ .

Beweis: [Stra] Satz 4.5.2, S. 67]

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir, dass eine mittels einer strikten Ungleichung definierte Menge offen ist, falls die Bedingung “stetig” ist:

**Beispiele.** [Anwendung von Satz 2.29]

(i) Die Menge

$$U := \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 - x < 1\}$$

ist offen (in  $\mathbb{R}$ ).

**Beweis:** Wir definieren  $\Omega := \mathbb{R}$ , die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^5 - x$  und  $V := (-\infty, 1)$ . Diese Funktion ist ein Polynom und daher gemäss Beispiel 2.9(ii) stetig. Es gilt

$$U = f^{-1}(V).$$

Gemäss Beispiel 2.17(ii) ist das Intervall  $V = (-\infty, 1)$  offen. Gemäss Satz 2.29 ist die Menge  $U = f^{-1}(V)$  daher offen (in  $\Omega = \mathbb{R}$ ).

<sup>18</sup>oder schlichtweg abgeschlossen in  $\Omega$  oder relativ abgeschlossen

(ii) Die Menge

$$U := \{x \in [0, \infty) \mid x^5 - x < 1\}$$

ist offen in  $[0, \infty)$ .

**Beweis:** Die Aussage folgt analog zu (i) mit  $\Omega := [0, \infty)$ .

Wir charakterisieren jetzt Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt mittels Umgebungen. Dafür brauchen wir also den folgenden Begriff. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $x_0 \in \Omega$ .

**Definition 2.30** (Umgebung). *Eine Teilmenge  $U \subseteq \Omega$  heißt Umgebung von  $x_0$  relativ zu  $\Omega$  (oder in  $\Omega$ ) g. d. w. es einen offenen Ball um  $x_0$  gibt, dessen Durchschnitt mit  $\Omega$  in  $U$  enthalten ist, d. h. es gibt ein  $r \in (0, \infty)$ , sodass*

$$B_r(x_0) \cap \Omega \subseteq U.$$

Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^d$  nennen wir ein solches  $U$  auch schlichtweg eine Umgebung von  $x_0$ .

**Beispiele.** • Seien  $\Omega := \mathbb{R}$  und  $a < x_0 < b$  reelle Zahlen. Die Intervalle  $]a, b[$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  und  $[a, b]$  sind Umgebungen von  $x_0$  (in  $\Omega = \mathbb{R}$ ).

- Seien  $\Omega := [0, \infty)$ . Das Intervall  $[0, 1]$  ist eine Umgebung von 0 in  $\Omega$ . Es ist jedoch keine Umgebung von 0 (in  $\mathbb{R}$ ).

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \Omega$ . Wir definieren Stetigkeit an einer Stelle wie in Definition 2.8.

**Satz 2.31** (Charakterisierung von Stetigkeit in einem Punkt mittels  $\varepsilon, \delta$  und Umgebungen). *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(a) (Folgenkriterium)  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ .

(b) (Weierstraßsches  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium) Für jedes  $\varepsilon \in (0, \infty)$  gibt es ein  $\delta \in (0, \infty)$ , sodass für jedes  $x \in \Omega$  gilt:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

(c) (Umgebungskriterium) Das Urbild jeder Umgebung von  $f(x_0)$  unter  $f$  ist eine Umgebung von  $x_0$  in  $\Omega$ .

**Bemerkungen.** • Die Bedingung (c) bedeutet: Für jede Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  (in  $\mathbb{R}^n$ ) ist  $U := f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x_0$  in  $\Omega$ .

- Die Äquivalenz “(a)  $\iff$  (b)” haben Sie in *Analysis 1* gesehen.



Abbildung 2.1: Karl Weierstraß, 1815–1897, deutscher Mathematiker, Vater der Epsilon-  
lontik (= Wissenschaft des  $\varepsilon$ ).

Beweis des Satzes [2.31](#): [Stra](#), Satz 4.5.1, S. 66].

Die Bedingung [\(b\)](#) ist nach Karl Weierstraß benannt.

**Beispiel.** [Charakterisierung von Stetigkeit in einem Punkt mittels Umgebungen] Wir betrachten die charakteristische Funktion der Menge  $\{0\}$ ,

$$\chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Siehe Beispiel [2.9\(iv\)](#).) Diese Funktion ist an der Stelle  $x_0 := 0$  unstetig, da das Urbild  $U$  der Umgebung  $V := (0, \infty)$  von  $f(0) = 1$  keine Umgebung von 0 ist. (Was ist  $U := f^{-1}(V)$ ?)



# Kapitel 3

## Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Dieses Kapitel entspricht [Stra] Kapitel 7]. Wir betrachten in diesem Kapitel eine vektorwertige Funktion  $f$  mehrerer Veränderlicher. Für eine solche Funktion definieren wir Begriff einer partiellen Ableitung, welche die gewöhnliche Ableitung einer Funktion einer Variable (wie in Analysis 1) verallgemeinert. Die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $i$ -ten Variable ist die gewöhnliche Ableitung der Funktion einer Variable, die wir aus  $f$  erhalten, indem wir alle Variablen ausser der  $i$ -ten festhalten.

Partielle Ableitungen treten zum Beispiel in der Divergenz eines Vektorfeldes auf. Die Divergenz kommt im Satz von Gauß vor, den wir in dieser Vorlesung behandeln werden.

### 3.1 Partielle Ableitungen und Differential

Um den Begriff einer partiellen Ableitung einer vektorwertigen Funktion zu definieren, brauchen wir die folgende Definition. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$g = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^p \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$$

und eine Funktion<sup>1</sup> und  $y_0 \in U$ .

**Definition 3.1** (Differenzierbarkeit und Ableitung einer vektorwertigen Funktion einer Variable). *Wir nennen  $g$  an der Stelle  $y_0$ <sup>2</sup> differenzierbar g. d. w. jede Komponente  $g^i$*

---

<sup>1</sup> $g^i$  ist also die  $i$ -te Komponente von  $f$ . Im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen verwenden wir einen oberen Index für die Koordinaten eines Punktes und die Komponenten einer Funktion. Das stimmt mit der Konvention der Physik überein, einen oberen Index für die Komponenten eines Vektors zu verwenden. Wenn die Gefahr besteht, den oberen Index mit einer Potenz zu verwechseln, werden wir einen unteren Index verwenden.

<sup>2</sup>oder *im Punkt*  $y_0$  oder *schlichtweg in*  $y_0$

im Punkt  $y_0$  differenzierbar ist (im Sinn der Analysis 1). In diesem Fall definieren wir die Ableitung von  $g$  im Punkt  $y_0$  als den Vektor

$$g'(y_0) := \begin{pmatrix} (g^1)'(y_0) \\ \vdots \\ (g^p)'(y_0) \end{pmatrix}.$$

Seien nun  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine offene<sup>3</sup> Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion. Das bedeutet, dass  $f$  eine vektorwertige Funktion mehrerer Veränderlicher ist. Wir schreiben  $x^j$  für die  $j$ -te Koordinate eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $f^i$  für die  $i$ -te Komponente von  $f$ . Das bedeutet, dass

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^p(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Sei  $x_0 \in \Omega$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definition 3.2** (partielle Differenzierbarkeit, partielle Ableitung, Jacobi-Matrix). *Wir nennen  $f$  an der Stelle  $x_0$  partiell nach der  $j$ -ten Variable  $x^j$  differenzierbar g. d. w. die Funktion*

$$g(y) := f(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n) \quad (3.1)$$

im Punkt  $y = x_0^j$  im Sinn der Definition 3.1 differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $j$ -ten Variable im Punkt  $x_0$  als die Ableitung von  $g$  im Punkt  $x_0^j$ . Wir schreiben diese partielle Ableitung als

$$f_{x^j}(x_0) := D_j f(x_0) := \partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) := g'(x_0^j) \in \mathbb{R}^p. \quad (3.2)$$

Wir sagen, dass  $f$  im Punkt  $x_0$  partiell differenzierbar ist g. d. w.  $f$  im Punkt  $x_0$  nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0$  als die Matrix

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x^1}(x_0) & \cdots & f_{x^n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x^1}^p(x_0) & \cdots & f_{x^n}^p(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir nennen  $f$  partiell differenzierbar g. d. w.  $f$  in jedem Punkt von  $\Omega$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $j$ -ten Variable als die Abbildung

$$f_{x^j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$$

gegeben durch (3.2).

---

<sup>3</sup>siehe Definition 2.16

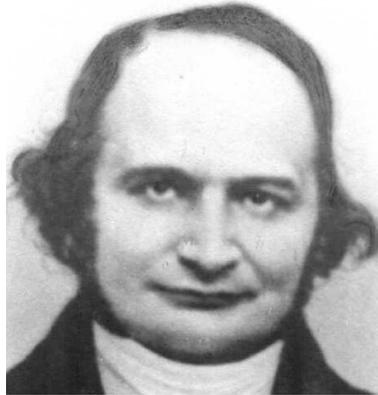


Abbildung 3.1: Carl Gustav Jacobi, 1804–1851, preussischer Mathematiker.

Die Jacobi-Matrix ist nach Carl Gustav Jacobi benannt, siehe Abbildung [3.1](#).

**Beispiele 3.3.** [partielle Differenzierbarkeit, partielle Ableitung, Jacobi-Matrix]

(i) Wir definieren

$$\Omega := \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := f(x^1, x^2) := x^1 e^{x^2}.$$

Sei  $x_0 \in \Omega$ . Wir definieren

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) := f(y, x_0^2) = y e^{x_0^2}.$$

Diese Funktion ist im Punkt  $x_0^1$  differenzierbar (im Sinn von Analysis 1). Daher ist  $f$  im Punkt  $x_0$  partiell nach der ersten Variable differenzierbar mit partieller Ableitung

$$f_{x^1}(x_0) = f_{x^1}(x_0^1, x_0^2) = g'(x_0^1) = e^{x_0^2}.$$

Ein ähnliches Argument zeigt, dass  $f$  im Punkt  $x_0$  partiell nach der zweiten Variable differenzierbar ist mit partieller Ableitung

$$f_{x^2}(x_0) = x_0^1 e^{x_0^2}.$$

(Überprüfen Sie das!) Die Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0 := (2, 0)$  ist gegeben durch

$$(J_f((2, 0)) = f_{x^1}(x_0) \quad f_{x^2}(x_0)) = (1 \quad 2).$$

(ii) Wir definieren

$$\Omega := \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := f(x^1, x^2) := \begin{pmatrix} x^1 e^{x^2} \\ \sin(x^2) \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion ist in jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$  partiell nach beiden Variablen differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$f_{x^1}(x_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{x^2}(x_0) = \begin{pmatrix} x_0^1 e^{x_0^2} \\ \cos(x_0^2) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0 := (2, 0)$  ist gegeben durch

$$(J_f((2, 0)) = f_{x^1}(x_0) \quad f_{x^2}(x_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir definieren

$$\Omega := \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := |x^1 + x^2|.$$

Sei  $x_0 \in \Omega$  so, dass  $x_0^2 \neq -x_0^1$ . Dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  partiell nach beiden Variablen differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$f_{x^1}(x_0) = f_{x^2}(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0^2 > -x_0^1 \\ -1, & \text{falls } x_0^2 < -x_0^1. \end{cases}$$

Sei  $x_0 \in \Omega$  jetzt so, dass  $x_0^2 = -x_0^1$ . Dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  nach keiner der beiden Variablen partiell differenzierbar. (Warum?)

Wir behandeln jetzt die *totale* Ableitung einer Funktion  $f$  mehrerer Variablen in einem Punkt  $x_0$ . Das ist eine lineare Abbildung, welche  $f - f(x_0)$  in der Nähe von  $x_0$  unter allen linearen Abbildungen am besten annähert. Die Ableitung ist daher die *Linearisierung* von  $f$  im Punkt  $x_0$ . Lineare Funktionen und "lineare Probleme" sind einfacher zu handhaben als nichtlineare. Linearisierung spielt deshalb eine grosse Rolle in Anwendungen. Zum Beispiel gibt es eine Formel für die allgemeine Lösung einer homogenen *linearen* gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. (Siehe Satz 1.8 in Abschnitt 1.2.)

Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^d (v^i)^2} \tag{3.3}$$

die euklidische Norm von  $v$ . Seien  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $x_0 \in \Omega$ .

**Definition 3.4** ((totale) Differenzierbarkeit in einem Punkt). *Wir nennen  $f$  an der Stelle  $x_0$  (total) differenzierbar g. d. w. es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  gibt, sodass*

$$g(x) := \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad (3.4)$$

*Wir nennen  $f$  (total) differenzierbar g. d. w.  $f$  an jeder Stelle in  $\Omega$  differenzierbar ist.*

**Bemerkung.** Die Funktion  $g$  ist auf  $\Omega \setminus \{x_0\}$  definiert. (Im Punkt  $x = x_0$  ist sie nicht definiert, da der Nenner  $\|x - x_0\|$  gleich 0 ist.) Der Punkt  $x_0$  liegt im Abschluss von  $\Omega \setminus \{x_0\}$ . Die geforderte Konvergenz ist daher sinnvoll. (Siehe Definition [2.5](#))

**Proposition 3.5** (Jacobi-Matrix). (i) *Falls  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  partiell differenzierbar.*

(ii) *Falls  $A$  eine lineare Abbildung ist, welche die Bedingung in Definition [3.4](#) erfüllt, dann ist  $A$  durch Matrixmultiplikation mit der Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0$  gegeben,*

$$A = J_f(x_0) \cdot : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Beweis: Das folgt aus einem Argument wie im Beweis von [DK04a](#), Lemma 2.2.3 p. 44].

**Bemerkung.** [Jacobi-Matrix] Aus dieser Proposition folgt, dass  $A$  eindeutig ist (falls es existiert).

**Definition 3.6** (Ableitung in einem Punkt). *Wir nennen die lineare Abbildung  $A$  (wie in Definition [3.4](#)) die (totale) Ableitung (oder das Differential) von  $f$  im Punkt  $x_0$ . Wir schreiben dafür*

$$df(x_0) := Df(x_0) := A.$$

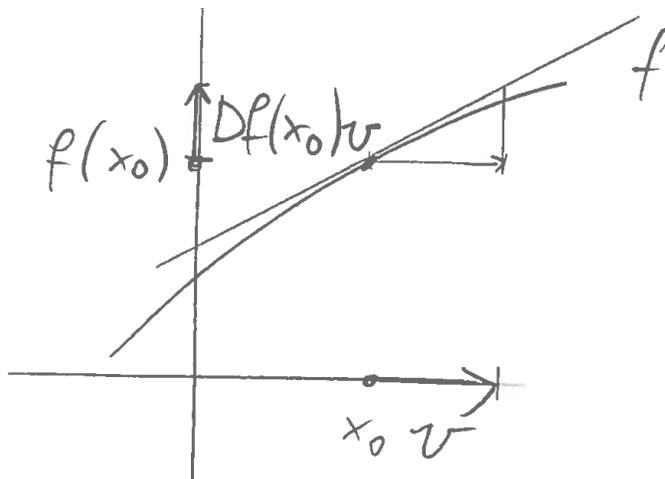
Abbildung [3.2](#) verdeutlicht diese Definition.  $df(x_0)v$  ist eine Näherung für die Differenz  $f(x_0 + v) - f(x_0)$ . Wir können  $df(x_0)$  daher als die Linearisierung von  $f$  im Punkt  $x_0$  auffassen.  $df(x_0)v$  stimmt mit der Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$  (im Punkt  $x_0$ ) überein. Diese Richtungsableitung ist die Ableitung der Funktion  $t \mapsto f(x_0 + tv)$  im Punkt  $t = 0$ . (Siehe Definition [3.18](#)) Das Differential beschreibt daher die Ableitung von  $f$  in jede Richtung.

**Bemerkungen 3.7.** [Ableitung einer Funktion in einem Punkt]

(i) Sei  $n = 1$ . Dann ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar im Sinn von Definition [3.4](#) g. d. w. sie an dieser Stelle differenzierbar ist im Sinn von Analysis 1. In diesem Fall gilt

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

(Multiplikation mit dem Vektor  $f'(x_0)$ ). (Im Fall  $p = 1$  ist  $f'(x_0)$  eine reelle Zahl.)

Abbildung 3.2: Das Differential einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (ii) In Analysis 1 wurde die Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0$  definiert als

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Naiv könnten wir daher versuchen, diese Definition auch für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  zu verwenden. Für  $n \geq 2$  ergibt das allerdings keinen strikten Sinn, da wir einen Vektor in  $\mathbb{R}^p$  nicht durch einen Vektor in  $\mathbb{R}^n$  teilen können. Definition [3.4](#) ist der mathematisch sinnvolle Ersatz für die naive Definition.

**Erklärung dafür:** Gemäss Proposition [3.5](#) entspricht die Ableitung  $df(x_0)$  der Jacobi-Matrix  $J_f(x_0)$ . Da *Matrix mal Vektor = Vektor*, ist die Idee, dass

“Vektor/ Vektor = Matrix”.

Heuristisch ist der (nicht präzise definierte) “Quotient  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ” daher eine Matrix, die wegen der Bedingung [\(3.4\)](#) für  $x \rightarrow x_0$  gegen die Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0$  konvergiert. Das erklärt, warum Definition [3.4](#) ein sinnvoller Ersatz für die naive Definition mittels eines Grenzwertes von Differenzenquotienten ist.

- (iii) Das Wort *heuristisch* kommt vom altgriechischen Wort εὐρίσχω = *heurisko* = ich finde, entdecke. In der obigen heuristischen Erklärung ging es darum herauszufinden, warum eine bestimmte lineare Abbildung eine sinnvolle Verallgemeinerung der Ableitung einer Funktion einer Variablen darstellt. Es handelt sich dabei nicht um ein präzises mathematisches Argument.
- (iv) Wir betrachten den Fall  $n = p = 1$ . Heuristisch meinen wir mit “infinitesimal” “unendlich klein, aber möglicherweise nicht gleich 0”. Philosophisch ist eine “positive infinitesimale Grösse” also eine Grösse, die grösser als 0 ist, aber kleiner

als jede positive reelle Zahl. Intuitiv betrachten wir eine “infinitesimale” Differenz  $\Delta x \neq 0$ , die wir ein “Differential  $dx$ ” nennen. Wir schreiben “ $dy$ ” für die zugehörige “infinitesimale” Differenz  $\Delta y$ . Heuristisch ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  durch den Quotienten dieser “Differenziale” gegeben, d. h.

$$f'(x_0) = \frac{\text{“}dy\text{”}}{\text{“}dx\text{”}}.$$

Die Ableitung  $f'(x_0)$  wird daher manchmal *Differentialquotient* genannt. Das erklärt den Namen *Differential* für  $df(x_0)$  wie in Definition [3.6](#) (für allgemeines  $n$  und  $p$ )<sup>4</sup>

- (v) (Nichtstandardanalysis) In unserer Vorlesung ist der Begriff einer “infinitesimalen Grösse”, wie zum Beispiel “ $dx$ ” oder “ $dy$ ”, nur ein heuristisches Konzept. Wir können einer solchen Grösse keinen mathematischen Sinn als eine *reelle Zahl* zuerkennen, da es keine (strikt) positive *reelle Zahl* gibt, die kleiner als jede strikt positive reelle Zahl ist. Es ist jedoch möglich, infinitesimale Grössen im Rahmen der sogenannten *Nichtstandardanalysis*<sup>5</sup> auf eine andere Art (mathematisch präzise) zu definieren.

**Beispiel 3.8.** [Ableitung einer affinen Funktion] Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  heisst *affin* g. d. w. es eine lineare Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^p$  gibt, sodass

$$f(x) = T(x) + w =: Tx + w$$
<sup>6</sup>

Jede affine Funktion ist differenzierbar (in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ), mit Ableitung

$$df(x_0) = T,$$

wobei  $T$  wie oben ist. (Überprüfen Sie das!)

Im nächsten Beispiel werden wir die folgende Bemerkung verwenden.

**Bemerkung 3.9.** [komponentenweise Differenzierbarkeit und Ableitung] Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $x_0 \in \Omega$ .  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar g. d. w. für jedes  $i = 1, \dots, p$  die  $i$ -te Komponente  $f^i$  in  $x_0$  differenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} d(f^1)(x_0) \\ \vdots \\ d(f^p)(x_0) \end{pmatrix}.$$

Das folgt aus den Definitionen von Differenzierbarkeit und Ableitung.

<sup>4</sup>Der Name “*Differentialquotient*” wäre vielleicht noch intuitiver. Für  $n > 1$  ist es allerdings unklar, was hier mit “*Quotient*” gemeint sein soll. Siehe Bemerkung [\(ii\)](#).

<sup>5</sup>Das ist ein Teilgebiet der Analysis.

<sup>6</sup>Wir lassen hier die Klammern um das Argument  $x$  weg, da  $T$  linear ist. (Das ist eine gängige Konvention.)

**Beispiele 3.10.** [Differenzierbarkeit und Ableitung]

(i) Wir definieren

$$\Omega := \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := f(x^1, x^2) := \begin{pmatrix} x^1 e^{x^2} \\ \sin(x^2) \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist differenzierbar.

**Beweis:** Gemäss Übungsserie 5 (Kettenregel) ist die Abbildung  $x \mapsto x^1 e^{x^2}$  differenzierbar. Die Abbildung  $x \mapsto \sin(x^2)$  ist differenzierbar. Das folgt aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit und der Tatsache, dass  $\sin$  differenzierbar ist. Die Komponenten der Abbildung  $f$  sind also differenzierbar. Gemäss Bemerkung 3.9 ist  $f$  daher differenzierbar.

Nach Proposition 3.5 und Beispiel 3.3(ii) ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0 := (2, 0)$  gegeben durch

$$df(x_0)v = df(x_0)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} v^1 + 2v^2 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

(ii) (bilineare Funktion ist differenzierbar) Seien  $\ell, m \in \mathbb{N}$ . Wir definieren  $n := \ell + m$ ,  $p := 1$  und schreiben  $\mathbb{R}^n$  als das kartesische Produkt  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$  und einen Punkt in  $x \in \mathbb{R}^n$  entsprechend als  $x = (y, z)$ . Sei  $b : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir nennen  $b$  *bilinear* g. d. w.  $b$  in beiden Argumenten linear ist, d. h., die Funktionen  $y \mapsto b(y, z_0)$  und  $z \mapsto b(y_0, z)$  sind linear für alle  $y_0 \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^m$ . Wir nehmen jetzt an, dass  $b$  bilinear ist. Sei  $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ .

**Behauptung:**  $b$  ist im Punkt  $x_0 = (y_0, z_0)$  (total) differenzierbar mit (totaler) Ableitung (= Differential) gegeben durch

$$db(x_0) = db(y_0, z_0) = A, \quad Av := b(u, z_0) + b(y_0, w), \quad \forall v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m. \quad (3.5)$$

**Beweis:** Wir definieren die *kanonischen Einheitsvektoren* in  $\mathbb{R}^d$  als

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_d := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben

$$b_{ij} := b(e_i, e_j).$$

Sei  $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ . Wir definieren

$$v := \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} := x - x_0 = \begin{pmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & b(x) - b(x_0) - Av \\ &= b(y_0 + u, z_0 + w) - b(y_0, z_0) - A \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \\ &= b(u, w) \quad (\text{da } b \text{ bilinear ist und wegen (3.5)}) \\ &= \sum_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} b_{ij} u^i w^j, \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass  $u = \sum_{i=1}^m u^i e_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w^i e_i$  und dass  $b$  bilinear ist. Wir schreiben

$$C := \max_{ij} |b_{ij}| mn. \tag{3.7}$$

**Behauptung:**

$$\left| \sum_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} b_{ij} u^i w^j \right| \leq C \|v\|^2 \tag{3.8}$$

**Beweis der Behauptung:** Da die Wurzel-Funktion monoton steigend ist, haben wir

$$|u^i| \leq \sqrt{\sum_{i'=1}^m (u^{i'})^2} = \|u\|, \quad |w^j| \leq \|w\|, \quad \forall i, j. \tag{3.9}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} b_{ij} u^i w^j \right| \\ & \leq \sum_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} (|b_{ij} u^i w^j| = |b_{ij}| |u^i| |w^j|) \\ & \leq \max_{i'j'} |b_{i'j'}| \sum_{i=1}^m |u^i| \sum_{j=1}^n |w^j| \\ & \leq C \|u\| \|w\| \quad (\text{wegen (3.7) (3.9)}) \\ & \leq C (\|u\|^2 + \|w\|^2) \quad (\text{das gilt, falls } \|u\| \leq \|w\| \text{ und falls } \|u\| \geq \|w\|) \\ & = C \|v\|^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Gleichheit  $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$  und die Definition (3.3) der euklidischen Norm verwendeten. Das beweist die Behauptung (3.8).

Indem wir (3.6) und (3.8) kombinieren, erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{|b(x) - b(x_0) - Av|}{\|v\|} \leq C\|v\|.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für  $v \rightarrow 0$ . Daher gilt dasselbe auch für die linke Seite. Daraus folgt, dass  $b$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar ist mit Ableitung  $db(x_0) = A$  gegeben durch (3.5).

Gemäss Proposition 3.5(i) ist jede differenzierbare Funktion *partiell* differenzierbar.

**Frage.** *Gilt auch die Umkehrung, d. h., ist jede partiell differenzierbare Funktion differenzierbar?*

Die Antwort auf diese Frage ist *nein*. Wie im Fall einer reellen Variable gilt auch für mehrere Variablen, dass jede differenzierbare Funktion stetig ist. Es gibt jedoch *partiell* differenzierbare Funktionen mehrerer Variablen, die unstetig und daher nicht differenzierbar sind.

Genauer gesagt, gilt das Folgende. Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion und  $x_0 \in \Omega$  ein Punkt.

**Proposition 3.11** (Differenzierbarkeit und Stetigkeit). *Falls  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.*

Beweis: [DK04a, Corollary 2.2.8, p. 46]

Wir können diese Proposition verwenden, um zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt nicht differenzierbar ist.

**Beispiel.** [unstetige partiell differenzierbare Funktion] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Es gilt  $f(\cdot, 0) \equiv 0$ . Daher ist  $f$  in  $x_0 = (0, 0)$  partiell differenzierbar nach der ersten Variable  $x$ , mit partieller Ableitung  $f_x \equiv 0$ . Aus einem ähnlichen Grund ist  $f$  in  $x_0 = (0, 0)$  partiell differenzierbar nach der zweiten Variable  $y$ , mit partieller Ableitung  $f_y \equiv 0$ .

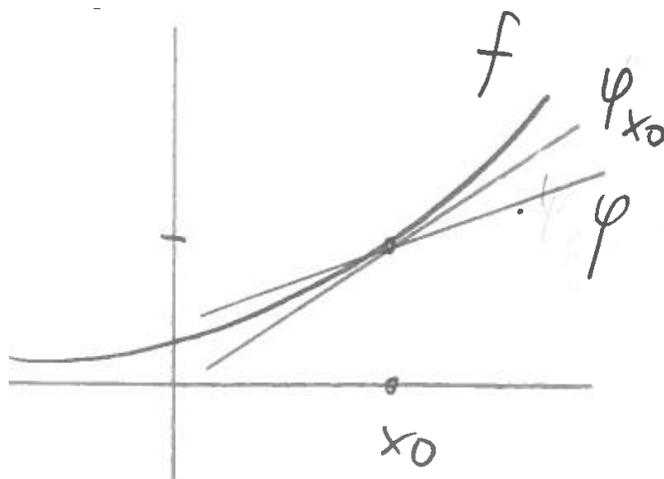


Abbildung 3.3: Die beste affine Näherung  $\varphi_{x_0}$  von  $f$  im Punkt  $x_0$  und eine andere affine Abbildung  $\varphi$ .

$f$  ist jedoch im Punkt  $x_0$  unstetig, da

$$f(t, t) = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(0, 0) = 0.$$

**Bemerkung.** Die Funktion  $f$  in diesem Beispiel ist sogar überall partiell differenzierbar. (Überprüfen Sie die Bedingung für  $(x, y) \neq (0, 0)$ !) Trotzdem ist sie nicht einmal stetig.

Die Ableitung von  $f$  führt zur *besten affinen Näherung* von  $f$ : Wir nehmen an, dass  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar ist. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \varphi_{x_0}(x) := f(x_0) + df(x_0)(x - x_0), \quad (3.10)$$

affin, d. h., eine lineare Abbildung plus eine Konstante. Diese Abbildung ist die *beste affine Näherung von  $f$  im Punkt  $x_0$* , siehe Abbildung [3.3](#). Diese Eigenschaft motiviert die Definition der totalen Ableitung.

## 3.2 Differentiationsregeln, Kettenregel, Richtungsableitung, Gradient, stetige Differenzierbarkeit

Ein zentrales Werkzeug in der Analysis ist die Kettenregel. Im Fall von reellwertigen Funktionen einer reellen Variable haben Sie diese Regel in Analysis 1 kennengelernt. Für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen gilt dieselbe Formel. Dabei ist die

Ableitung einer solchen Funktion in einem Punkt eine lineare Abbildung. (Siehe Definition [3.6](#).) Das Produkt der Ableitungen der Funktionen wird jetzt zur Verknüpfung dieser linearen Abbildungen.

Seien  $n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^p$  offene Teilmengen und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  und  $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^q$  Abbildungen. Die Verknüpfung (oder Komposition)  $g \circ f$  ist die Abbildung

$$g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Sei  $x_0 \in \Omega$  ein Punkt.

**Satz 3.12** (Kettenregel, [Stra](#), Satz 7.6.2, S. 178). *Falls  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist und  $g$  in  $f(x_0)$  differenzierbar ist, dann ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung*

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ (df(x_0)) = dg(f(x_0))df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q. \quad (3.11)$$

Beweis: S. [82](#)

**Bemerkungen.** [Kettenregel]

- Auf der rechten Seite von [\(3.11\)](#) steht die Verknüpfung der linearen Abbildungen  $dg(f(x_0))$  und  $df(x_0)$ . Da diese Abbildungen linear sind, lassen wir das Verknüpfungszeichen weg. (Das ist eine gängige Konvention.)

Diese Verknüpfung ist sinnvoll, da der Zielbereich<sup>7</sup> von  $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ist, was mit dem Definitionsbereich von  $dg(f(x_0)) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  übereinstimmt. Die verknüpfte Funktion ist eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^q$ . Dasselbe gilt für die linke Seite von [\(3.11\)](#). Diese Gleichheit ist daher sinnvoll.

- Dieser Satz verallgemeinert die Kettenregel für Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche besagt, dass im Fall  $n = p = q = 1$  gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad (3.12)$$

(Siehe [Stra](#), Satz 5.1.3, S. 82.) Die Formeln [\(3.12\)](#), [\(3.11\)](#) stimmen miteinander überein, da im Fall  $n = p = 1$  gemäss Bemerkung [3.7\(i\)](#) gilt:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Aus der Kettenregel und Proposition [ii](#) folgt, dass die Jacobi-Matrix der verknüpften Funktion gleich der Verknüpfung der Jacobi-Matrizen ist, genauer gilt

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))J_f(x_0).$$

<sup>7</sup>In [Stra](#), Definition 1.3.1, p. 8] wird der Zielbereich der *Bild-* oder *Wertebereich* genannt.

**Beispiel 3.13.** [quadratische Funktion ist differenzierbar] Sei  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine bilineare Funktion.

**Behauptung:** Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := g(x, x),$$

ist in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar mit Ableitung

$$dh(x_0)v = g(v, x_0) + g(x_0, v). \quad (3.13)$$

**Beweis:**  $h$  ist gleich der Verknüpfung  $g \circ f$ , wobei

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(x) := (x, x).$$

Da  $g$  bilinear ist, ist diese Funktion gemäss Beispiel 3.10(ii) in jedem Punkt  $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  differenzierbar mit Ableitung

$$dg(y_0, z_0)(u, w) = g(u, z_0) + g(y_0, w).$$

Die Abbildung  $f$  ist auch in jedem Punkt  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung

$$df(x_0)v = (v, v).$$

Das folgt aus Beispiel 3.8 (affine Funktion ist differenzierbar). Nach Satz 3.12 (Kettenregel) ist  $h$  daher in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar mit Ableitung

$$dh(x_0)v = dg(f(x_0))df(x_0)v = g(v, x_0) + g(x_0, v). \quad (3.14)$$

Das beweist (3.13).

**Bemerkung 3.14.** Wir nehmen an, dass  $g$  symmetrisch ist. (Das ist zum Beispiel der Fall, falls  $g$  ein Skalarprodukt ist.) Dann wird die (3.14) zur Gleichheit

$$dh(x_0)v = 2g(x_0, v).$$

Aus Satz 3.12 folgt, dass Summe, Produkt und Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $x_0 \in \Omega$ .

**Korollar 3.15** (Ableitung von Summe, Produkt, Quotient, [Stra], Satz 7.6.1, S. 178).  
Wir nehmen an, dass  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar sind. Es gilt:

(i) Die Summe  $f + g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

(ii) (Leibnizregel) Das Skalarprodukt  $f \cdot g = \sum_{i=1}^p f^i g^i$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0),$$

wobei  $g(x_0) \cdot df(x_0) := \sum_{i=1}^p g^i(x_0) df^i(x_0)$  u.s.w.

(iii) Wenn  $p = 1$  und  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist der Quotient  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

**Bemerkung.** Im Fall  $n = p = 1$  haben Sie dieses Korollar in Analysis 1 kennengelernt. Siehe [Stra] Satz 5.1.2, S. 81].

**Beispiel 3.16.** [Ableitung von Produkt] Wir betrachten die Identitätsfunktion

$$f := g := \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{id}(x) := x.$$

Das Skalarprodukt  $h := f \cdot g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist die quadratische Funktion

$$h(x) := (f \cdot g)(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

Die Funktion  $\text{id}$  ist linear und daher gemäss Beispiel [3.8] differenzierbar mit Ableitung in  $x_0$  gegeben durch

$$d\text{id}(x_0) = \text{id}.$$

Gemäss Korollar [3.15(ii)] ist die Funktion  $h$  daher differenzierbar, mit Ableitung in  $x_0$  gegeben durch

$$\begin{aligned} dh(x_0)(v) &= (g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0))(v) \\ &= x_0 \cdot v + x_0 \cdot v \\ &= 2x_0 \cdot v. \end{aligned}$$

Das stimmt mit Beispiel [3.13] überein.

**Beweis von Korollar [3.15]:** (ii): Wegen Bemerkung [3.9] ist die Funktion

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$$

im Punkt  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung

$$d\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} df(x_0) \\ dg(x_0) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Das Standard-Skalarprodukt, also die Funktion

$$h : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(Y, Z) := Y \cdot Z,$$

is bilinear. Gemäss Beispiel 3.10(ii) ist diese Funktion daher in jedem Punkt  $(Y_0, Z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  differenzierbar mit Ableitung

$$dh(Y_0, Z_0)(U, W) = h(U, Z_0) + h(Y_0, W) = U \cdot Z_0 + Y_0 \cdot W. \quad (3.16)$$

Die Funktion  $f \cdot g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleich der Verknüpfung  $h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ . Gemäss der Kettenregel (Satz 3.12) ist diese Funktion daher im Punkt  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(x_0)v &= d\left(h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)(x_0)v \\ &= dh(f(x_0), g(x_0))d\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0)v \\ &= dh(f(x_0), g(x_0))\begin{pmatrix} df(x_0)v \\ dg(x_0)v \end{pmatrix} \quad (\text{wegen } 3.15)) \\ &= (df(x_0)v) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)v \quad (\text{wegen } 3.16)). \end{aligned}$$

Das beweist (ii).

Aussage (i) folgt mittels eines analogen Arguments aus der Gleichheit  $f+g = h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ , wobei  $h(Y, Z) := Y+Z$ . Wir verwenden hierbei, dass  $h$  linear ist und Beispiel 3.8 (affine Funktion ist differenzierbar).

(iii): Im Fall  $f \equiv 1$  folgt diese Aussage mittels eines analogen Arguments aus der Gleichheit  $\frac{1}{g} = h \circ g$ , wobei  $h(y) := \frac{1}{y}$ . Wir können die allgemeine Situation auf diesen Fall reduzieren, indem wir die Gleichheit  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  und (ii) verwenden.  $\square$

Wir beweisen jetzt Satz 3.12 (Kettenregel).

**Beweisidee:**

- Wir schreiben

$$y := f(x), \quad z := g(y), \quad \Delta x := x - x_0 \quad \text{etc.},$$

$$\Delta z - dg(y_0)df(x_0)\Delta x = \Delta z - dg(y_0)\Delta y + dg(y_0)(\Delta y - df(x_0)\Delta x). \quad (3.17)$$

- Wir nehmen die euklidische Norm auf beiden Seiten dieser Gleichheit. Wir verwenden die Dreiecksungleichheit. Wir teilen durch  $\|\Delta x\|$ .

- Die entstandenen Terme schätzen wir ab, indem wir verwenden, dass  $f$  und  $g$  an geeigneten Stellen differenzierbar sind.
- Daraus folgt, dass  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar ist mit Ableitung  $dg(y_0)df(x_0)$ .

**Bemerkung.** Die rechte Seite von (3.17) wird manchmal eine Teleskopsumme genannt, da sie aus der linken Seite dadurch entsteht, dass wir zwei Terme einfügen, die einander aufheben. Das so, als ob wir ein Teleskop auseinanderzögen, wodurch es länger wird.

Im Beweis der Kettenregel werden wir den folgenden Hilfssatz verwenden.

**Hilfssatz 3.17** (Substitutionsregel für Grenzwert einer Funktion). *Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $F : X \rightarrow Y$ ,  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $x_0 \in \overline{X}$ ,  $y_0 \in \overline{Y}$  und  $z_0 \in Z$ , sodass*

$$F(x) \rightarrow y_0 \text{ für } x \rightarrow x_0, \quad G(y) \rightarrow z_0 \text{ für } y \rightarrow y_0.$$

Dann gilt

$$G \circ F(x) \rightarrow z_0, \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

**Beweis von Hilfssatz 3.17:** Sei  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ . Da  $G(y) \rightarrow z_0$  für  $y \rightarrow y_0$ , gibt es gemäss der Implikation (a)  $\implies$  (b) in Satz 2.31 ein  $\delta_0 \in ]0, \infty[$ , sodass für alle  $y \in Y$  gilt:

$$\|y - y_0\| < \delta_0 \implies \|G(y) - z_0\| < \varepsilon. \quad (3.18)$$

Da  $F(x) \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$ , gibt es gemäss der Implikation (a)  $\implies$  (b) in Satz 2.31 ein  $\delta \in ]0, \infty[$ , sodass für alle  $x \in X$  gilt:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|F(x) - y_0\| < \delta_0.$$

Sei nun  $x \in X$ , sodass  $\|x - x_0\| < \delta$ . Dann gilt  $y := F(x) \in Y$  und  $\|F(x) - y_0\| < \delta_0$ . Wegen (3.18) gilt daher

$$\|G(F(x)) - z_0\| < \varepsilon.$$

Also konvergiert  $G \circ F(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen  $z_0$ . Das beweist Hilfssatz 3.17.  $\square$

Für jede lineare Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  definieren wir die *Operatornorm* (bzgl. den euklidischen Normen) als

$$\|T\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n: \|v\| \leq 1} \|Tv\|.$$

Das ist eine (endliche) Zahl. (Das folgt aus Korollar 2.14.)

**Beweis des Satzes 3.12 (Kettenregel):** Seien  $\Omega, \Omega', f, g, x_0$  wie in diesem Satz vorausgesetzt. Wir definieren

$$y_0 := f(x_0), \quad z_0 := g(y_0).$$

Sei  $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ . Wir schreiben

$$y := f(x), \quad z := g(y), \quad \Delta x := x - x_0, \quad \Delta y := y - y_0, \quad \Delta z := z - z_0, \\ S := df(x_0), \quad T := dg(y_0).$$

Es gilt, dass

$$\Delta z - TS\Delta x = \Delta z - T\Delta y + T(\Delta y - S\Delta x)$$

und daher, dass

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta z - TS\Delta x\|}{\|\Delta x\|} &\leq \frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta x\|} + \frac{\|T(\Delta y - S\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \\ &\leq \frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} + \|T\| \frac{\|\Delta y - S\Delta x\|}{\|\Delta x\|}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar ist, gilt, dass

$$\frac{\|\Delta y - S\Delta x\|}{\|\Delta x\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad (3.20)$$

Es gibt daher ein  $\delta > 0$ , sodass  $B_\delta^n(x_0) \subseteq U$  und die linke Seite von (3.20) für jedes  $x \in B_\delta^n(x_0) \setminus \{x_0\}$  kleiner oder gleich 1 ist. Für dieses  $\delta$  gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_\delta^n(x_0) \setminus \{x_0\}} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} &\leq \sup_{x \in B_\delta^n(x_0) \setminus \{x_0\}} \left( \frac{\|\Delta y - S\Delta x\|}{\|\Delta x\|} + \frac{\|S\Delta x\|}{\|\Delta x\|} \right) \\ &\leq 1 + \|S\| < \infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da  $g$  im Punkt  $y_0$  differenzierbar ist, gilt, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow y_0.$$

Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist diese Funktion gemäss Proposition 3.11 in  $x_0$  stetig. Daher gilt  $y \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Darum folgt aus Hilfssatz 3.17, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad (3.22)$$

Wegen (3.21) folgt daraus, dass

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

(Überlegen Sie sich das!) Indem wir das mit (3.19) (3.20) kombinieren, folgt daraus, dass

$$\frac{\|\Delta z - TS\Delta x\|}{\|\Delta x\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad (3.23)$$

Also ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung

$$d(g \circ f)(x_0) = TS = dg(f(x_0))df(x_0).$$

Das beweist Satz 3.12.  $\square$

**Bemerkung.** • Der Ausdruck

$$\frac{\|\Delta z - T\Delta y\|}{\|\Delta y\|}, \quad (3.24)$$

der in (3.19) und (3.22) auftritt, ist im Fall  $\Delta y = 0$  a priori nicht sinnvoll, da wir dann durch 0 teilen. In diesem Fall definieren wir den Ausdruck (3.24) als 0. Mit dieser Definition gelten die Aussagen (3.19)(3.22) auch im Fall  $\Delta y = 0$ .

Manchmal wollen wir wissen, wie sich eine Funktion bis zur ersten Ordnung ändert, wenn sich ihr Argument in eine bestimmte Richtung bewegt. Diese Idee wird durch die Richtungsableitung präzise gemacht. Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion,  $x_0 \in \Omega$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 3.18** (Richtungsableitung). *Wir sagen, dass  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist g. d. w. die Funktion*

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad g(t) := f(x_0 + tv),$$

im Punkt  $t = 0$  differenzierbar ist<sup>8</sup>. In diesem Fall definieren wir die (Richtungs-)Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  als den Vektor

$$d_v f(x_0) := D_v f(x_0) := g'(0) := \begin{pmatrix} (g^1)'(0) \\ \vdots \\ (g^p)'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p. \quad (3.25)$$

**Bemerkungen.** [Richtungsableitung, partielle Ableitungen]

- Falls  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  dort in Richtung  $v$  differenzierbar und

$$d_v f(x_0) = df(x_0)v. \quad (3.26)$$

Beweis: Wir definieren den Weg<sup>9</sup>

$$x : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(t) := x_0 + tv.$$

<sup>8</sup>im Sinn von Definition 3.1

<sup>9</sup>Mit einem Weg meinen wir eine Funktion einer Variablen, die Werte in  $\mathbb{R}^n$  annimmt.

Dieser Pfad ist im Punkt  $t = 0$  differenzierbar mit Ableitung

$$x'(0) = v.$$

Nach der Kettenregel (Satz 3.12) für  $g := f \circ x$  ist  $f$  daher im Punkt  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar und

$$g'(0) = (f \circ x)'(0) = df(x(0))x'(0) = df(x_0)v.$$

Das beweist (3.26).

- $f$  ist im Punkt  $x_0$  partiell nach der  $j$ -ten Variable differenzierbar g. d. w. die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $e_j$ <sup>10</sup> existiert. In diesem Fall gilt die Gleichheit

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = D_j f(x_0) = d_{e_j} f(x_0). \quad (3.27)$$

Der *Gradient* einer reellwertigen Funktion in einem Punkt ist ein Vektor, der aus allen partiellen Ableitungen (erster Ordnung) der Funktion besteht. Er gibt die Richtung und Wert der stärksten Steigung der Funktion an. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in \Omega$ . Wir nehmen an, dass  $f$  in  $x$  differenzierbar ist.

**Definition 3.19** (Gradient). *Der Gradient von  $f$  an der Stelle  $x$  ist der Vektor*

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x) \\ \vdots \\ f_{x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkungen.** [Gradient, nabla, stärkste Steigung]

- Das Symbol  $\nabla$  wird “nabla” ausgesprochen. Dieser Name kommt von einem antiken Saiteninstrument, das die Form einer Harfe hatte. Formal ist  $\nabla$  der Vektor

$$\nabla = (D_1, \dots, D_n).$$

- Der Gradient von  $f$  an der Stelle  $x$  ist die Transponierte der Jacobi-Matrix von  $f$ ,

$$\nabla f(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x_0) & \cdots & f_{x^n}(x_0) \end{pmatrix}^T.$$

(Für jede Matrix  $A$  bezeichnet  $A^T$  die Transponierte von  $A$ . Diese Matrix ist gegeben durch  $(A^T)^j_i = A^i_j := (i, j)$ -ter Eintrag von  $A$ .)

<sup>10</sup> $e_j$  ist der  $j$ -te kanonische Einheitsvektor. Siehe Beispiel 3.10(ii).

- Wir nehmen an, dass  $\nabla f(x) \neq 0$ . Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein normierter Vektor. (Das bedeutet, dass  $\|v\| = 1$ .)

**Behauptung:** Die Richtungsableitung  $d_v f(x)$  ist genau dann maximal, falls  $v$  in Richtung  $\nabla f(x)$  zeigt, d. h., falls

$$v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} d_v f(x) &= df(x)v \\ &= \nabla f(x) \cdot v \\ &\leq \|\nabla f(x)\| \|v\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der linearen Algebra}) \\ &= \|\nabla f(x)\|, \end{aligned}$$

mit Gleichheit g. d. w.  $\nabla f(x)$  und  $v$  in die gleiche Richtung zeigen. Daraus folgt die Behauptung.

Wegen dieser Behauptung gibt der Gradient  $\nabla f(x)$  die Richtung der stärksten Steigung (also des steilsten Anstiegs) von  $f$  im Punkt  $x$  an. Die Norm des Gradienten ist der Wert der stärksten Steigung, da

$$d_{\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}} f(x) = \frac{\nabla f(x) \cdot \nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \|\nabla f(x)\|.$$

- Der Name “Gradient” kommt vom lateinischen Wort *gradus*, was *Schritt* bedeutet.

**Beispiel 3.20.** [Gradient] Wir bezeichnen mit  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und definieren

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Der Gradient von  $f$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  wird gegeben durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ \vdots \\ 2x^n \end{pmatrix} = 2x.$$

Das stimmt mit dem Beispiel [3.13](#) überein. Gemäss jenem Beispiel gilt nämlich

$$df(x)v = 2g(x, v),$$

wobei  $g(x, y) := x \cdot y$  (Standard-Skalarprodukt).

Eine Funktion  $f$  mehrerer Veränderlicher heisst *stetig differenzierbar* g. d. w. sie partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen stetig sind. In diesem Fall ist die Funktion differenzierbar. In gewissen Situationen ist stetige Differenzierbarkeit die “richtige” Bedingung. Damit meine ich, dass unter dieser Bedingung eine gegebene Aussage wahr ist, aber falsch unter der schwächeren Bedingung, dass  $f$  nur differenzierbar ist. Ein Beispiel dafür ist der Umkehrsatz. (Siehe Satz [4.3](#))

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

**Definition 3.21** (stetige partielle Differenzierbarkeit). *Wir nennen eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig partiell differenzierbar (oder schlichtweg stetig differenzierbar oder von der Klasse  $C^1$ ) g. d. w. wenn  $f$  partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen stetig sind.*

Wir definieren die Menge

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}^p) := C^1(\Omega; \mathbb{R}^p) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}.$$

Im Fall  $p = 1$  schreiben wir einfacher

$$C^1(\Omega) := C^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

**Proposition 3.22** (stetige partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit). *Jede stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  ist (überall) differenzierbar.*

Beweis: Das folgt aus [\[Stra\]](#) Satz 7.1.1, S. 157] und Bemerkung [3.9](#).

**Bemerkung.** Nach Proposition [3.22](#) und [3.11](#) ist jede stetig partiell differenzierbare Funktion stetig.

**Beispiel 3.23.** [Polynom ist  $C^1$ ] Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *Polynom (auf  $\mathbb{R}^n$ )* g. d. w. sie eine (endliche) lineare Kombination von Funktionen der Form

$$x \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ist, wobei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ . ( $x_i$  bezeichnet die  $i$ -te Koordinate von  $x \in \mathbb{R}^n$ .) Der Grad des Polynoms  $f$  ist die grösste Zahl  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , sodass der Term  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  in  $f$  (mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten) auftritt.

Ein Beispiel für ein Polynom auf  $\mathbb{R}^3$  ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := -x_1^2 + 3x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3x_3.$$

Der Grad dieses Polynoms ist 4, da für  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$  der Term  $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$  in  $f$  auftritt.

**Behauptung:** Jedes Polynom  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist stetig (partiell) differenzierbar.

**Beweis:** Jede partielle Ableitung von  $f$  ist ein Polynom auf  $\mathbb{R}^n$ . Jedes Polynom ist stetig. Das folgt aus dem Argument in Beispiel 2.9(i). Also ist  $f$  stetig partiell differenzierbar, wie behauptet.

### 3.3 Vektorfeld, Potential und Wegintegral

Dieser Abschnitt entspricht Abschnitten 7.3 und 7.4 in [Stra].

Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung  $X$  von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ . In der Physik spielt  $X$  die Rolle einer vektorwertigen Grösse, zum Beispiel des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer Flüssigkeit oder des elektrischen Feldes.

Ein *Potential* eines Vektorfeldes  $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deren Gradient  $\nabla f$  gleich  $X$  ist.<sup>11</sup> Ein Vektorfeld besitzt genau dann ein Potential, wenn sein *Wegintegral* nur von den Endpunkten eines gegebenen Weges abhängt. Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^3$  ist das genau dann der Fall, falls  $\nabla \times X$ , die *Rotation* von  $X$ , gleich 0 ist.

Zum Beispiel erfüllt in der Elektrostatik das *elektrische Feld*  $X = E$  diese Bedingung.<sup>12</sup> Es besitzt daher ein Potential. Der Unterschied dieses Potentials an zwei verschiedenen Punkten ist die *elektrische Spannung* zwischen den Punkten.

Als ein anderes Beispiel besitzt in der Strömungslehre das *Geschwindigkeitsvektorfeld* unter gewissen Bedingungen ein Potential.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

**Definition 3.24** (Vektorfeld, Gradientenfeld). *Ein Vektorfeld auf  $\Omega$  ist eine Abbildung*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

*Sei  $f \in C^1(\Omega)$  (wie in Definition 3.21). Wir definieren das Gradientenfeld von  $f$  als*

$$\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}.$$

<sup>11</sup>In der Physik verlangt man stattdessen, dass  $-\nabla f = X$ .

<sup>12</sup>In der *Elektrostatik* wird angenommen, dass sich das elektrische und magnetische Feld (in der Zeit) nicht ändern. Die *Elektrodynamik* behandelt die allgemeine Situation, in der sich diese Felder ändern können. In dieser Situation ist die Rotation des elektrischen Feldes nicht mehr immer gleich 0.

**Bemerkung.** Im Punkt  $x \in \Omega$  ist das Gradientenfeld von  $f$  also durch den Gradienten von  $f$  an der Stelle  $x$  gegeben.

**Beispiel 3.25.** [Gradientenfeld] Das Gradientenfeld der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|^2$$

ist gegeben durch

$$\nabla f(x) = 2x.$$

Siehe Beispiel [3.20](#)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld.

**Definition 3.26** (Potential und Konservativität eines Vektorfeldes). *Ein Potential für  $X$  ist eine differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass*

$$\nabla f = X.$$

*Das Vektorfeld  $X$  heisst konservativ g. d. w. es ein Potential besitzt.*

**Bemerkungen.** [Potential eines Vektorfeldes im 1-dimensionalen Fall, Stammfunktion]

- Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Dann ist  $X$  eine Funktion von einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Ein Potential für  $X$  ist eine *Stammfunktion* für  $X$ , d. h., eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$f' = X.$$

Im Fall  $n = 1$  ist jedes stetige Vektorfeld konservativ, da jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}$  können wir diese Stammfunktion zum Beispiel als das Integral

$$f(x) := \int_0^x X(y) dy$$

definieren. (Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann, dass  $f' = X$ .)

- Der Term *Konservativität* für die Eigenschaft in Definition [3.26](#) ist dadurch motiviert, dass in einem konservativen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt, d. h. “konserviert” wird. Siehe Beispiel [3.38](#) unten.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den folgenden Problemen:

**Probleme 3.27.** (i) Entscheide, ob ein gegebenes Vektorfeld  $X$  konservativ ist.

(ii) Berechne in diesem Fall ein Potential für  $X$ .

Wir werden Kriterien für die Konservativität eines Vektorfeldes kennenlernen. (Siehe die Sätze 3.32 und 3.42.) Die Kriterien basieren auf Wegintegralen und partiellen Ableitungen des Vektorfeldes. Falls ein Potential existiert, dann werden wir ein solches mittels eines Wegintegrals konstruieren. (Siehe Satz 3.35)

Seien  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld,  $a \leq b$  reelle Zahlen und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  ein  $C^1$ -Weg, d. h. stetig differenzierbar.

**Definition 3.28** (Wegintegral). Wir definieren das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  als

$$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt. \quad (3.28)$$

**Bemerkungen.** • In der Physik spielt  $\gamma(t)$  die Rolle des Ortes eines Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ . Die Ableitung  $\dot{\gamma}(t)$  ist dann die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

- **Infinitesimale Interpretation und Erklärung für die Notation:** Heuristisch fassen wir “ $dt$ ” als den “infinitesimalen”, d. h., “unendlich kleinen” Unterschied zwischen zwei Zeitpunkten auf, “unendlich nahe beieinander liegen”. Wir interpretieren “ $d\gamma(t)$ ” als “ $\gamma(t+dt) - \gamma(t)$ ”, also als den “infinitesimalen Verbindungsvektor zwischen  $\gamma(t)$  und  $\gamma(t+dt)$ ”. Dieser Vektor ist gegeben durch

$$\text{“ } d\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)dt = \dot{\gamma}(t)dt \text{ ”.}$$

Daher ist das Integral auf der rechten Seite von (3.28) heuristisch gegeben durch die unendliche Summe

$$\begin{aligned} \text{“ } \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt &= \sum_{t \in [a, b]} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \sum_{t \in [a, b]} X(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) \\ &= \int X \cdot d\gamma \text{ ”.} \end{aligned}$$

Das erklärt die Notation  $\int X \cdot d\gamma$  für das Wegintegral.

- Das Wort *heuristisch* kommt vom altgriechischen Wort  $\epsilon\upsilon\acute{\rho}\iota\sigma\chi\omega = \textit{heurisko}$  = ich finde, entdecke. In der obigen heuristischen Bemerkung ging es darum herauszufinden, warum die Notation  $\int X \cdot d\gamma$  sinnvoll ist. Es handelt sich dabei nicht um eine präzise mathematische Erklärung.

- Im Skript [Stra] wird für das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  die Notation  $\int_{\gamma} X \cdot d\vec{s}$  verwendet, siehe [Stra, Definitionen 7.4.2 und 7.4.3, S. 171].
- Wegintegrale spielen eine wichtige Rolle in der *Funktionentheorie = komplexen Analysis*.

**Beispiel 3.29.** [Wegintegral] Wir betrachten den Weg in  $\Omega := \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung dieses Weges ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Das Wegintegral eines stetigen Vektorfeldes  $X$  längs  $\gamma$  ist daher gegeben durch

$$\int X \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} X(\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt. \quad (3.29)$$

Wir betrachten jetzt das Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

(Zeichnen Sie dieses Vektorfeld!) Das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  ist gemäss (3.29) gegeben durch

$$\begin{aligned} \int X \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + (\cos t)^2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.30.** [Wegintegral des Kraftfeldes] Wir betrachten ein Teilchen in  $\Omega := \mathbb{R}^3$ , auf welches eine Kraft  $(x)$  wirkt, die vom Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  abhängt. Die Kraft ist also ein Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^3$ , das *Kraftfeld*. Wir schreiben  $\gamma(t)$  für den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ . Das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$ ,

$$\int X \cdot d\gamma$$

ist die Arbeit, welche das Kraftfeld am Teilchen verrichtet. Heuristisch ist die rechte Seite dieses Integrals nämlich die Summe “ $\sum_{t \in [a,b]} (\gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$ ”, wobei “ $d\gamma(t) = \gamma(t + dt) - \gamma(t)$ ”. Die “infinitesimale Grösse  $(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$ ” ist die Arbeit, die das Kraftfeld im “infinitesimalen Zeitintervall  $[t, t + dt]$ ” am Teilchen verrichtet. (Arbeit = Kraft mal Weg.)

Der folgende Satz charakterisiert Konservativität eines Vektorfeldes. Er liefert somit eine Methode, um Problem [3.27\(i\)](#) zu lösen. Wir brauchen die folgende Definition. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge.

**Definition 3.31** (Geschlossenheit eines Weges). *Ein Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  heisst geschlossen g. d. w.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .*

Wir nehmen jetzt an, dass  $\Omega$  offen ist. Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld.

**Satz 3.32** (Charakterisierung der Konservativität eines stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a)  $X$  ist konservativ.

(b) Das Wegintegral von  $X$  längs eines stetigen Weges hängt nur von den Endpunkten des Weges ab, d. h.: Falls  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$ ,  $i = 0, 1$ , stetige Wege sind, sodass  $\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1)$  und  $\gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1)$ , dann gilt

$$\int X \cdot d\gamma_0 = \int X \cdot d\gamma_1.$$

(c) Das Wegintegral von  $X$  längs jedes stetigen geschlossenen Weges ist gleich null.

Beweis: [\(a\)](#)  $\implies$  [\(b\)](#): siehe Seite [98](#).

[\(a\)](#)  $\iff$  [\(b\)](#) folgt aus Satz [3.35](#) (Siehe unten.)

[\(b\)](#)  $\iff$  [\(c\)](#) folgt aus dem Beweis von [\[Stra, Satz 7.4.2, S. 168\]](#). (Siehe auch [\[Stra, Satz 7.4.3, S. 171\]](#).)

**Beispiel.** [Wegintegral, nicht-konservatives Vektorfeld] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

**Behauptung:**  $X$  ist nicht konservativ.

**Beweis:** Wir betrachten den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

Dieser Weg ist geschlossen. Gemäss Beispiel 6.7 ist das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  gegeben durch

$$\int X \cdot d\gamma = 2\pi \neq 0.$$

Gemäss dem Kontraponierten von Satz 3.32(a)  $\implies$  (c) ist  $X$  daher nicht konservativ.

Falls das Vektorfeld  $X$  konservativ ist, dann können wir dafür mittels des Wegintegrals und des Satzes 3.32 ein Potential konstruieren. Das ist Teil des folgenden Satzes. Um diesen Satz zu formulieren, brauchen wir die folgende Definition. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definition 3.33** (weg-zusammenhängend, konvex). (i)  $\Omega$  heisst weg-zusammenhängend g. d. w. es für jedes Paar von Punkten  $x_0, x_1 \in \Omega$  einen stetigen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $x_0$  nach  $x_1$  gibt, d. h.

$$\gamma(i) = x_i, \quad \text{für } i = 0, 1.$$

(ii)  $\Omega$  heisst konvex g. d. w. für jedes Paar von Punkten  $x_0, x_1 \in \Omega$  und jedes  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$\gamma(t) := (1-t)x_0 + tx_1 \in \Omega. \quad (3.30)$$

**Beispiele 3.34.** [weg-zusammenhängend, konvex]

- Falls  $\Omega$  konvex ist, dann ist  $\Omega$  weg-zusammenhängend, da dann für jedes Paar von Punkten  $x_0, x_1 \in \Omega$  die Funktion  $\gamma$  wie in (3.30) ein stetiger Weg von  $x_0$  nach  $x_1$  ist.
- Jeder (offene oder abgeschlossene) Ball ist konvex. Insbesondere ist  $\mathbb{R}^n$  konvex.
- Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist genau dann weg-zusammenhängend, wenn sie ein (möglicherweise leeres oder unbeschränktes) Intervall ist.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld.

**Satz 3.35** (Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes). *Wir nehmen an, dass das Wegintegral von  $X$  längs eines stetigen Weges nur von den Endpunkten des Weges abhängt, d. h., dass Bedingung (b) (S. 92) erfüllt ist. Wir setzen auch voraus, dass  $\Omega$  weg-zusammenhängend ist. Sei  $x_0 \in \Omega$ . Wir definieren die Funktion*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \int X \cdot d\gamma_x, \quad (3.31)$$

wobei für jedes  $x \in \Omega$   $a_x \leq b_x$  reelle Zahlen sind und  $\gamma_x : [a_x, b_x] \rightarrow \Omega$  ein stetiger Weg von  $x_0$  nach  $x$  ist. Es gilt:

- (i)  $f$  ist ein Potential für  $X$ , d. h.,  $f$  ist differenzierbar und  $\nabla f = X$ .
- (ii) Falls  $g$  ein Potential für  $X$  ist, dann gibt es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ , sodass
 
$$g = f + C.$$

Beweis: (i) folgt aus der Behauptung im Beweis von [Stra, Satz 7.4.2, S. 168].

(ii) folgt aus [Stra, Satz 7.4.1, S. 168].

**Bemerkungen.** [Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes]

- Die Funktion (3.31) ist wohldefiniert, d. h.:
  - (a) Ein Weg  $\gamma_x$  wie in dieser Definition existiert.
  - (b) Das Wegintegral auf der rechten Seite hängt nicht von der Wahl von  $\gamma_x$  ab.
- (a) gilt gemäss Definition 3.33(i) (weg-zusammenhängend). (b) folgt aus der Voraussetzung, dass das Wegintegral von  $X$  längs eines stetigen Weges nur von den Endpunkten des Weges abhängt.
- Satz 3.35 beschreibt alle Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale. (Dass der Satz alle Potentiale beschreibt, folgt aus Aussage (ii).) Je zwei Potentiale unterscheiden sich durch eine additive Konstante, falls das Gebiet  $\Omega$  weg-zusammenhängend ist.
- Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . In diesem Fall folgt Satz 3.35 aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die Funktion  $X : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Um das zu sehen, wählen wir  $a_x := x_0$ ,  $b_x := x$ ,  $\gamma_x : [a_x, b_x] = [x_0, x] \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma_x(t) := t$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_{x_0}^x X(\gamma_x(t)) \dot{\gamma}_x(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x X(t) \cdot 1 dt, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \nabla f(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x X(t) dt = X(x),$$

gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die Funktion  $X$ .

Wir nehmen an, dass  $\Omega$  weg-zusammenhängend ist. Eine Methode, um die Probleme [3.27\(i ii\)](#) für ein gegebenes Vektorfeld  $X$  zu lösen, ist die folgende:

**Methode 3.36** (Konservativität, Potential). • Wähle  $x_0 \in \Omega$  und für jedes  $x \in \Omega$  einen Weg  $\gamma_x$ .

- Definiere  $f$  wie in [\(3.31\)](#).
- Berechne  $\nabla f$ .
- Falls  $\nabla f = X$ , dann ist  $X$  konservativ und  $f$  ein Potential für  $X$ .
- Falls  $\nabla f \neq X$ , dann ist  $X$  nicht konservativ.

Die letzte Aussage folgt aus Satz [3.35\(i\)](#).

**Beispiele 3.37.** [Konservativität und Potentiale eines Vektorfeldes] Wir verwenden Methode [3.36](#), um die Probleme [3.27\(i ii\)](#) für die folgenden Vektorfelder zu lösen.

(i) Wir betrachten das *Euler-Vektorfeld*, d. h. die Identitätsabbildung

$$X := \text{id} : \Omega := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X(x) = x.$$

Wir wählen ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , der Einfachheit halber  $x_0 := 0$ . Sei  $x \in \Omega$ . Wir definieren der Einfachheit halber

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_x(t) := (1 - t)x_0 + tx = tx.$$

Das ist ein stetiger Weg von  $x_0 = 0$  nach  $x$ . Wir definieren die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wie in [\(3.31\)](#), d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t) dt \\ &= \int_0^1 tx \cdot x dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^1 \|x\|^2 \\ &= \frac{\|x\|^2}{2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist quadratisch und daher differenzierbar. (Siehe Beispiel [3.13](#).) Ihr Gradient ist gemäss Beispiel [3.20](#) gegeben durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x = X(x).$$

Die Funktion  $f$  ist daher tatsächlich ein Potential für  $X$ . Somit haben wir das obige Problem gelöst.

(ii) Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , der Einfachheit halber  $x_0 := 0$ . Sei  $x \in \Omega$ . Wir definieren der Einfachheit halber

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_x(t) := (1-t)x_0 + tx = tx.$$

Wir definieren die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wie in [3.31](#), d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \int X \cdot d\gamma_x \\ &= \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ tx_1 \end{pmatrix} \cdot x dt \\ &= \int_0^1 tx_1x_2 \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^1 x_1x_2 \\ &= \frac{x_1x_2}{2}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist quadratisch und daher differenzierbar. Ihr Gradient ist gegeben durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = X(x).$$

$X$  ist daher *nicht* konservativ. (Das folgt aus Satz [3.35\(i\)](#).)

**Beispiel 3.38.** [physikalische Interpretation, konservatives Kraftfeld, Arbeit, Energieerhaltung] Wir betrachten ein Teilchen in  $\Omega := \mathbb{R}^3$ , auf welches eine Kraft  $(x)$  wirkt, die stetig vom Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  abhängt. Wir nehmen an, dass konservativ ist. Wir fixieren einen Punkt  $x_0 \in \Omega$  und definieren die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wie in (3.31) mit  $X :=$ . Eine differenzierbare Funktion  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$= -\nabla U$$

heisst *potentielle Energie* des Teilchens. Wir fixieren eine potentielle Energie  $U$ . (Da konservativ ist, gibt es ein solches  $U$ .) Gemäss Satz (3.35)(ii) gibt es eine Konstante  $C$ , sodass

$$-U = f + C. \quad (3.32)$$

Die potentielle Energie ist also bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Sei  $x \in \mathbb{R}^3$ . Aus (3.32) folgt, dass

$$f(x) - f(x_0) = -U(x) + U(x_0).$$

Gemäss Beispiel (3.30) und der Definition (3.31) ist  $f(x) - f(x_0) = f(x)$  die *Arbeit*, die das Kraftfeld am Teilchen verrichtet, wenn es sich via des Weges  $\gamma_x$  von  $x_0$  nach  $x$  bewegt. Diese Arbeit ist also gleich der Differenz der potentiellen Energie an den Punkten  $x_0$  und  $x$ .

Falls  $\gamma_x$  der durch das Kraftfeld verursachte Weg des Teilchens ist, wird die am Teilchen verrichtete Arbeit in kinetische Energie des Teilchens umgewandelt. In diesem Fall ist daher die totale (=kinetische + potentielle) Energie des Teilchens am Anfang und am Ende des Weges gleich. In einem konservativen Kraftfeld bleibt also die totale Energie eines Teilchens erhalten. In einem System mit nur konservativen Kräften gibt es daher kein *Perpetuum mobile* erster Art. Damit meinen wir eine Maschine, die netto Energie erzeugt. Siehe Abbildung (3.4) für ein Bild einer solchen Maschine.

Um die Implikation (a)  $\implies$  (b) in Satz (3.32) (S. (92)) zu beweisen, brauchen wir das folgende Lemma. Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(\Omega) = C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $a \leq b$  reelle Zahlen und  $\gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ .

**Lemma 3.39** (Wegintegral eines Gradientenfeldes). *Das Wegintegral des Gradientenfeldes  $\nabla f$  längs des Weges  $\gamma$  ist die Differenz der Werte von  $f$  in den Endpunkten von  $\gamma$ ,*

$$\int \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

**Beweis des Lemmas (3.39):** Gemäss Satz (3.12) (Kettenregel) gilt

$$df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.33)$$

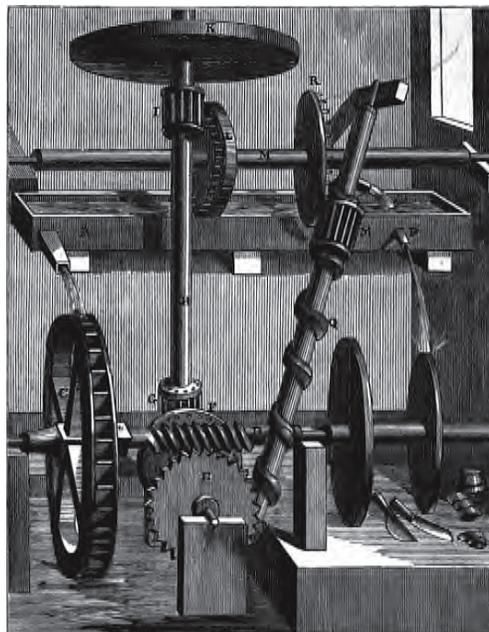


Abbildung 3.4: Ein Perpetuum mobile.

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \int \nabla f \cdot d\gamma &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= \int_a^b df(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) dt \quad (\text{gemäss } (3.33)) \\
 &= f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a) \quad (\text{gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}).
 \end{aligned}$$

Das beweist Lemma [3.39](#).  $\square$

**Beweis der Implikation [\(a\)](#)  $\implies$  [\(b\)](#) in Satz [\(3.32\)](#):** Wir nehmen an, dass [\(a\)](#) gilt, also, dass  $X$  konservativ ist. D. h., es gibt eine differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\nabla f = X.$$

Seien  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$ ,  $i = 0, 1$ , stetige Wege, sodass

$$\gamma_0(a_0) = \gamma_1(a_1), \quad \gamma_0(b_0) = \gamma_1(b_1). \quad (3.34)$$

**Fall:**  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  sind stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int X \cdot d\gamma_0 &= \int \nabla f \cdot d\gamma_0 \\ &= f(\gamma_0(b_0)) - f(\gamma_0(a_0)) \quad (\text{gemäss Lemma } \boxed{3.39}) \\ &= f(\gamma_1(b_1)) - f(\gamma_1(a_1)) \quad (\text{gemäss } \boxed{3.34}) \\ &= \int \nabla f \cdot d\gamma_1 \quad (\text{gemäss Lemma } \boxed{3.39}) \\ &= \int X \cdot d\gamma_1. \end{aligned}$$

Also gilt  $\boxed{b)}$ . Die allgemeine Situation, in welcher  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  nur stetig sind, können wir auf den Fall stetig differenzierbarer Wege reduzieren, indem wir  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  durch stetig differenzierbare Wege annähern.

Das beweist die Implikation  $\boxed{a)} \implies \boxed{b)}$  in Satz  $\boxed{3.32}$ .  $\square$

### 3.4 Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation eines Vektorfeldes

Zusätzlich zu Satz  $\boxed{3.32}$  können wir die Konservativität eines Vektorfeldes mittels Ableitungen statt Integrale charakterisieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes. Wir brauchen die folgende Definition. Wie in  $\boxed{2.3}$  schreiben wir  $S_r^{d-1}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d$  für die Sphäre mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r$ . Im Fall  $d = 2$ ,  $x_0 = 0$  und  $r = 1$  ist das der Einheitskreis <sup>$\boxed{13}$</sup>

$$S^1 := S_1^1(0).$$

**Definition 3.40** (einfach zusammenhängend). *Eine Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst einfach zusammenhängend g. d. w.  $\Omega$  weg-zusammenhängend ist und für jede stetige Abbildung  $\gamma : S^1 \rightarrow \Omega$  es eine stetige Abbildung  $h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \Omega$  gibt, sodass*

$$h(0, y) = \gamma(y), \quad \forall y \in S^1, \quad \gamma' := h(1, \cdot) : S^1 \rightarrow \Omega \text{ ist konstant} \quad \boxed{14}$$

**Bemerkungen.** [Schleife, Homotopie]

- Eine stetige Abbildung  $\gamma : S^1 \rightarrow \Omega$  heisst *Schleife in  $\Omega$* .

<sup>13</sup>In der Mathematik bezeichnet *Kreis* den Rand der Kreisscheibe (ohne das Innere).

<sup>14</sup> $\gamma'(y) = h(1, y)$

- Eine Abbildung  $h$  wie oben heisst *Homotopie* zwischen  $\gamma$  und  $\gamma'$ . Das erklärt die Wahl des Buchstabens  $h$ .

**Beispiele 3.41.** [(nicht-)einfach zusammenhängend]

- Jede konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend. (Können Sie eine Homotopie  $h$  von einer gegebenen Schleife zu einer konstanten Schleife finden?) Gemäss Beispiel 3.34(3.34) ist also jeder Ball einfach zusammenhängend. Insbesondere gilt das für  $\mathbb{R}^n$ .
- Der Kreis  $\Omega := S^1$  ist *nicht* einfach zusammenhängend. Für die Identitätsabbildung  $\text{id} : S^1 \rightarrow S^1$  gibt es nämlich keine Homotopie zu einer konstanten Abbildung. Das folgt aus dem Beweis von [Hat02, Theorem 1.7, p. 29].
- Aus dem letzten Beispiel folgt, dass die offene Teilmenge  $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  von  $\mathbb{R}^2$  *nicht* einfach zusammenhängend ist. Alternativ folgt das auch aus Korollar 3.44 unten. Siehe Beispiel 3.45

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld.

**Satz 3.42** (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung) Falls  $X$  konservativ ist, dann erfüllt es die Integrabilitätsbedingung

$$D_i X^j = D_j X^i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

(ii) Falls  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist und (3.35) erfüllt ist, dann ist  $X$  konservativ.

Beweis: (i): S. 110

(ii): [Strb, Satz 9.9.3. ii), S. 308] Dieser Satz charakterisiert die Konservativität eines Vektorfeldes. Er liefert somit eine weitere Methode, um Problem 3.27(ii) zu lösen.

**Beispiele 3.43.** [Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung]

(i) Wir betrachten das *Euler-Vektorfeld*, d. h. die Identitätsabbildung

$$X := \text{id} : \Omega := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X(x) = x.$$

Seien  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $x \in \Omega$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} D_i X^j(x) &= \delta_i^j := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \delta_j^i \\ &= D_j X^i(x). \end{aligned}$$

Also erfüllt  $X$  die *Integrabilitätsbedingung* (3.35). Gemäss Beispiel (3.41)(3.41) ist  $\Omega = \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend. Gemäss Satz (3.42) ist  $X$  daher konservativ. Das stimmt mit dem überein, was wir in Beispiel (3.37)(i) herausgefunden haben.

(ii) Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \Omega := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + e^{(e^{x_2})} \end{pmatrix}.$$

Für  $i = 1, j = 2$  und  $x \in \Omega$  berechnen wir

$$\begin{aligned} D_1 X^2(x) &= 1 + 0 \\ &\neq 0 \\ &= D_2 X^1(x). \end{aligned}$$

Daher ist  $X$  nicht konservativ.

**Bemerkungen.** [Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung]

- Im Beispiel (3.43)(ii) können wir alternativ versuchen, Methode (3.36) anzuwenden. Dazu müssen wir für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  das Wegintegral  $\int X \cdot d\gamma_x$  für ein geeignetes  $\gamma_x$  berechnen. Es scheint schwierig, ein  $\gamma_x$  zu finden, wofür wir dieses Integral explizit berechnen können. (Versuchen Sie es!) In diesem Fall ist also die obige auf Satz (3.42) beruhende Methode einfacher.
- Falls  $\Omega$  nicht einfach zusammenhängend ist, dann folgt aus der Integrabilitätsbedingung (3.35) im Allgemeinen *nicht*, dass  $X$  konservativ ist. Für ein Gegenbeispiel siehe Übungsserie 6 (Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet).

Als Anwendung von Satz (3.42)(ii) erhalten wir die folgende hinreichende Bedingung dafür, dass eine offene Menge nicht einfach zusammenhängend ist.

**Korollar 3.44** (Nicht-einfacher Zusammenhang). *Eine offene Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist nicht einfach zusammenhängend, falls es ein  $C^1$ -Vektorfeld  $X$  gibt, das die Integrabilitätsbedingung (3.35) erfüllt, sowie einen geschlossenen stetigen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , sodass das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  ungleich 0 ist.*

**Beweis des Korollars (3.44):** Aus Satz (3.42)(ii) und Satz (3.32)(a)  $\implies$  (c) folgt:

Wenn  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, dann ist für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $X$ , das die Integrabilitätsbedingung (3.35) erfüllt und jeden geschlossenen stetigen Weg  $\gamma$  in  $\Omega$  das Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$  gleich 0.

Das Kontraponierete dieser Aussage ist die Aussage des Korollars. Somit haben wir das Korollar bewiesen.  $\square$

**Beispiel 3.45.** [Nicht-einfacher Zusammenhang] **Behauptung:** Die Menge

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

ist nicht einfach zusammenhängend.

**Beweis:** Wir betrachten das  $C^1$ -Vektorfeld

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \frac{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}}{\|x\|^2}.$$

Dieses Vektorfeld erfüllt die Integrabilitätsbedingung (3.35). (Siehe Übungsserie 6, nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.) Wir betrachten den geschlossenen stetigen Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

Wir haben

$$\int X \cdot d\gamma = 2\pi \neq 0.$$

Das folgt aus einer Rechnung wie in Beispiel 6.7. Gemäss Korollar 3.44 folgt daher, dass  $\Omega$  nicht einfach zusammenhängend ist.

In den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  bedeutet die Bedingung (3.35) in Satz 3.42, dass die Rotation des Vektorfeldes  $X$  verschwindet. Diese Rotation ist wie folgt definiert.

**Definition 3.46** (Rotation eines Vektorfeldes). (i) Fall  $n = 2$ : Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die (skalare) Rotation (oder Wirbelstärke) von  $X$  als die reellwertige Funktion

$$\text{rot } X := D_1 X^2 - D_2 X^1 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

(ii) Fall  $n = 3$ : Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Rotation von  $X$  als das Vektorfeld

$$\vec{\text{rot}} X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2 X^3 - D_3 X^2 \\ D_3 X^1 - D_1 X^3 \\ D_1 X^2 - D_2 X^1 \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**Bemerkung.** Formal ist  $\nabla \times X$  das Kreuzprodukt von  $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$  mit  $X$ . Das ist der Grund für diese Notation.

**Beispiele.** [Rotation eines Vektorfeldes]

- Das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

hat Rotation

$$\text{rot } X(x) = D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x) = 1 - (-1) = 2.$$

- Das Euler-Vektorfeld

$$X := \text{id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x) := x,$$

hat Rotation

$$\vec{\text{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} D_2 X^3 - D_3 X^2 \\ D_3 X^1 - D_1 X^3 \\ D_1 X^2 - D_2 X^1 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = 0.$$

**Bemerkung.** [Integrabilitätsbedingung und Rotation] In den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  ist die Integrabilitätsbedingung (3.35) äquivalent zur *Wirbelfreiheit* von  $X$ , d. h., zur Bedingung

$$\text{rot } X = 0 \quad (n = 2), \quad \text{respektive} \quad \vec{\text{rot}} X = 0 \quad (n = 3).$$

Der Name *Rotation* für  $\text{rot } X$  kommt davon, dass das Vektorfeld (3.36) eine nicht-verschwindende Rotation hat und sein *Fluss* durch Rotationen (Drehungen) gegeben wird. Um das zu erklären und zu präzisieren, brauchen wir die folgende Bemerkung.

**Bemerkung 3.47.** [Fluss eines Vektorfeldes] Wir betrachten ein  $C^1$ -Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Es gibt ein offenes Intervall  $I$ , das 0 enthält und eine stetig differenzierbare Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = X \circ x \quad (3.37)$$

und der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0. \quad (3.38)$$

(Siehe [Stra], Satz 7.5.1, S. 185.) Die Lösung ist eindeutig, im Sinn, dass jedes Paar von Lösungen auf dem Durchschnitt der beiden Intervalle übereinstimmt. Der *Fluss*<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Dieser Begriff des Flusses unterscheidet sich vom Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche, der in den Sätzen von Stokes und Gauß auftritt. (Siehe später.)

des Vektorfeldes  $X$  ist eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die durch die Gleichung

$$\varphi_X(t, x_0) := x(t)$$

definiert ist, wobei  $x$  die eindeutige Lösung von (3.37) (3.38) ist.  $U$  ist dabei maximal.

**Beispiel 3.48.** [Fluss eines Vektorfeldes] Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  betrachten wir das Vektorfeld

$$X_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X_c(x) := c \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Der Fluss von  $X_c$  ist gegeben durch

$$\varphi_{X_c} : U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_{X_c}(t, x_0) = R_{ct}(x_0),$$

wobei  $R_a$  die Drehung um den Ursprung in  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $a$  im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet. (Überprüfen Sie, dass diese Abbildung  $\varphi_{X_c}$  die Bedingungen (3.37) (3.38) löst!)

**Bemerkungen 3.49.** [Motivation für den Namen *Rotation*]

- (i) Wir betrachten den Fall  $n = 2$  und das Vektorfeld  $X_c$  wie in (3.39). Gemäss Beispiel 3.48 ist der Fluss dieses Vektorfeldes durch Drehung um den Ursprung  $x_0 := 0$  gegeben. Die Rotation von  $X_c$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}^2$  ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} X_c(x) &= c(D_1 x^1 - D_2(-x^2)) \\ &= 2c \\ &= 2 \cdot \text{Winkelgeschwindigkeit der durch } X_c \text{ hervorgerufenen Drehung.} \end{aligned}$$

Das motiviert den Namen *Rotation von  $X$*  für  $\operatorname{rot} X$ .

- (ii) Wir betrachten jetzt den Fall  $n = 3$ . Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine antisymmetrische Matrix, d. h.  $A^T = -A$ . Wir betrachten das Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^3$ , das durch

$$X(x) := Ax$$

gegeben ist. In diesem Fall können wir die Rotation von  $X$  wie folgt geometrisch beschreiben. Wir schreiben  $A^i_j$  für den  $(i, j)$ -ten Eintrag von  $A$ . Wir definieren

$$v := \begin{pmatrix} A^3_2 \\ A^1_3 \\ A^2_1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Der Zeit- $t$ -Fluss von  $X$  (definiert wie in Bemerkung 3.47) ist durch eine ‘Drehung um  $tv$ ’ gegeben, d. h. eine Drehung um die Achse  $\frac{v}{\|v\|}$  um den Winkel  $t\|v\|$ , falls

$v \neq 0$ , und durch die Identität, falls  $v = 0$ . Das folgt aus Bemerkung 3.47 und die Tatsache, dass es eine Orthonormalbasis  $v_1, v_2, v_3$  von  $\mathbb{R}^3$  gibt, sodass  $X(v_1) = v_2$ ,  $X(v_2) = -v_1$ ,  $X(v_3) = 0$ . (Warum gibt es eine solche Basis? Tipp: Definieren Sie  $v_3 := v/\|v\|$ , falls  $v \neq 0$ .)

Die Rotation des Vektorfeldes  $X$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  wird durch zweimal die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung gegeben, d. h.

$$\vec{\text{rot}}X(x) = 2v = 2 \cdot \text{Winkelgeschwindigkeit der durch } X \text{ erzeugten Drehung.} \quad (3.41)$$

Das motiviert den Namen “Rotation von  $X$ ” für  $\vec{\text{rot}}X$ .

- (iii) Aus der obigen Bemerkung ergibt sich die folgende strömungsmechanische Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes. Sei  $0 \neq A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine antisymmetrische Matrix. Wir betrachten eine strömende Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit im Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  durch

$$v(x) := X(x) = Ax$$

gegeben ist. Wir platzieren einen kleinen harten Ball im Ursprung von  $\mathbb{R}^3$ . Nach einer gewissen Einlaufzeit dreht sich der Ball mit der Strömung mit, d. h., er dreht sich um die Achse  $\frac{v}{\|v\|}$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\|v\|$ , wobei  $v$  wie in 3.40 definiert ist. Das folgt aus Bemerkung (ii). Gemäss 3.41 ist die Rotation von  $X$  also gleich zweimal die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Balles.

In den folgenden Bemerkungen stellen wir eine Verbindung zur komplexen Analysis her. Wir zeigen mit Hilfe der Sätze 3.42 und 3.32 unter anderem, dass das komplexe Wegintegral einer holomorphen Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet nur von den Endpunkten des vorgegebenen Weges abhängt.

**Bemerkungen.** [Holomorphie, Cauchy-Riemann-Gleichungen, Integrabilitätsbedingung, (komplexes) Wegintegral]

- Wie Sie in der komplexen Analysis gelernt haben, ist eine komplexwertige Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  *holomorph*, d. h. komplex differenzierbar, g. d. w.  $f$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt.<sup>16</sup> Jede der beiden Cauchy-Riemann-Gleichungen entspricht der Integrabilitätsbedingung 3.35. Um das zu sehen, identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ . Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  offen und

$$f := u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Funktion. Wir definieren

$$X := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

<sup>16</sup>Für die Implikation “ $\Leftarrow$ ” nehmen wir an, dass  $f$  partiell differenzierbar und stetig ist.

Wir schreiben die Standardkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$  als  $x, y$ . Die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* für  $f$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.43)$$

Gleichung (3.42) ist äquivalent zu

$$D_1 Y^2 = D_2 Y^1,$$

was äquivalent zur Integrabilitätsbedingung (3.35) ist.

Gleichung (3.43) ist äquivalent zu

$$D_2 X^1 = D_1 X^2,$$

was ebenfalls äquivalent zur Integrabilitätsbedingung (3.35) ist.

- Wir nehmen jetzt an, dass  $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist und dass  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  ein stetiger Weg.

**Behauptung:** Das *komplexe Wegintegral*<sup>17</sup>

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \quad (18)$$

hängt nur von den Endpunkten von  $\gamma$  ab.

**Beweis:** Es gilt (mit  $\text{Re} = \text{Realteil}$ )

$$\text{Re} \left( \int_{\gamma} f \right) = \int X \cdot d\gamma. \quad (3.44)$$

(Überprüfen Sie das!) Das Vektorfeld  $X = (u, -v)$  erfüllt wegen (3.43) die Integrabilitätsbedingung (3.35). Gemäss Satz 3.42(ii) ist  $X$  daher konservativ. Gemäss Satz 3.32(a)  $\implies$  (b) hängt  $\int X \cdot d\gamma$  daher nur von den Endpunkten von  $\gamma$  ab. Wegen (3.44) gilt dasselbe für  $\text{Re} \left( \int_{\gamma} f \right)$ .

Analog gilt für  $Y = (v, u)$ , dass (mit  $\text{Im} = \text{Imaginärteil}$ )

$$\text{Im} \left( \int_{\gamma} f \right) = \int Y \cdot d\gamma.$$

Aus der ersten Cauchy-Riemann-Gleichung (3.42) folgt,  $Y$  konservativ ist. Daher hängt  $\text{Im} \left( \int_{\gamma} f \right)$  nur von den Endpunkten von  $\gamma$  ab. Damit folgt die Behauptung.

<sup>17</sup>siehe die Vorlesung *komplexe Analysis*

<sup>18</sup>Hier tritt das Produkt der komplexen Zahlen  $f(\gamma(t))$  und  $\dot{\gamma}(t)$  auf.

### 3.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Taylorpolynom, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix

Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definition 3.50** (höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit,  $C^k$ ). *Wir nennen jede Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  0-mal partiell differenzierbar (keine Bedingung). Ihre (eindeutige) partielle Ableitung 0-ter Ordnung ist  $f$ . Rekursiv definieren wir für  $k \in \mathbb{N}$ :*

*Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  heisst  $k$ -mal partiell differenzierbar g. d. w. sie  $(k - 1)$ -mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen  $(k - 1)$ -ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen von  $f$   $k$ -ter Ordnung sind die Funktionen  $D_j g$ , wobei  $j \in \{1, \dots, n\}$  und  $g$  alle partiellen Ableitungen von  $f$   $(k - 1)$ -ter Ordnung durchläuft.*

*Wir nennen  $f$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar (oder  $k$ -mal stetig differenzierbar oder schlicht  $C^k$ ) g. d. w.  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung stetig sind. Für  $k \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die Menge*

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^p) := C^k(\Omega; \mathbb{R}^p) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}.$$

*Wir nennen  $f$  beliebig oft stetig partiell differenzierbar (oder  $C^\infty$  oder glatt) g. d. w.  $f \in C^k$  ist für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

**Bemerkungen.** [höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit,  $C^k$ ]

- (Rekursion) Die Definition der  $k$ -fachen Differenzierbarkeit beruht auf *Rekursion* über  $k$ . In einer rekursiven Definition definieren wir zuerst ein Objekt oder einen Begriff  $A_0$  und dann für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Objekt oder einen Begriff  $A_k$  mittels  $A_{k-1}$ . Zum Beispiel ist das Produkt  $A_k := kn$  zweier natürlicher Zahlen  $k, n$  rekursiv definiert durch

$$A_0 := 0, \quad A_k := A_{k-1} + n.$$

(Überprüfen Sie, dass diese Definition mit Ihrer Intuition des Produktes übereinstimmt!)

In der Definition 3.50 ist  $A_k$  der Begriff der  $k$ -fachen partiellen Differenzierbarkeit von  $f$  zusammen mit dem Begriff der partiellen Ableitungen von  $f$   $k$ -ter Ordnung.

Zum Beispiel heisst  $f$  gemäss dieser Definition 1-mal partiell differenzierbar g. d. w.  $f$   $1 - 1 = 0$ -mal partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von  $f$  0-ter Ordnung partiell differenzierbar sind<sup>19</sup>.  $f$  ist 1-mal partiell

---

<sup>19</sup>im Sinn der Definition 3.2

differenzierbar g. d. w.  $f$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von  $f$  1-ter Ordnung gerade die partiellen Ableitungen von  $f$  [20](#)

Als ein weiteres Beispiel heisst  $f$  gemäss Definition [3.50](#) 2-mal partiell differenzierbar g. d. w.  $f$  1-mal partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von  $f$  1-ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Das bedeutet, dass  $f$  partiell differenzierbar ist und dass die partiellen Ableitungen von  $f$  ebenfalls differenzierbar sind.

- Die partiellen Ableitungen von  $f$   $k$ -ter Ordnung sind die Funktionen

$$D_{j_k} \cdots D_{j_1} f \quad \text{mit} \quad j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

- Jede  $k$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion  $C^k$ -Funktion  $f$  hat stetige partielle Ableitungen  $i$ -ter Ordnung für  $i \in \{0, \dots, k\}$ . Das folgt aus:
  - Proposition [3.22](#): (1-mal) stetig partiell differenzierbar  $\implies$  differenzierbar
  - Proposition [3.11](#): differenzierbar  $\implies$  stetig

Jede  $C^k$ -Funktion ist also auch von der Klasse  $C^{k-1}, \dots, C^0$ .

- $C^0(\Omega, \mathbb{R}^p)$  ist die Menge der stetigen Funktionen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^p$ .
- Die Definition von  $C^k$  im Skript [\[Stra\]](#) (Definition 7.5.1, S. 171, Definition 7.5.2, S. 173) ist ein wenig anders formuliert. Sie ist äquivalent zur Definition [3.50](#).

**Beispiel.** Jedes Polynom auf  $\mathbb{R}^n$  [21](#) ist glatt. Das folgt aus einem Argument wie in Beispiel [3.23](#)

Eine wichtige Eigenschaft einer  $C^k$ -Funktion ist, dass es für eine solche Funktion nichts ausmacht, in welcher Reihenfolge wir die partiellen Ableitungen nehmen. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von Schwarz. Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(\Omega) = C^2(\Omega, \mathbb{R})$  und  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Satz 3.51** (Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen [22](#)). *Es gilt*

$$D_i D_j f = D_j D_i f.$$

Beweis: [\[Stra\]](#), Satz 7.5.1, S. 171]

Dieser Satz ist nach Hermann Schwarz benannt, siehe Abbildung [3.5](#).

<sup>20</sup>im Sinn der Definition [3.2](#)

<sup>21</sup>siehe die Definition in Beispiel [3.23](#)

<sup>22</sup>Mit "Differentiation" meinen wir "Ableitung nehmen".



Abbildung 3.5: Hermann Schwarz, 1843–1921, deutscher Mathematiker.

**Beispiel.** [Satz von Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2^2.$$

( $x_i := i$ -te Koordinate von  $x$ ) Diese Funktion ist von der Klasse  $C^2$ . (Sie ist sogar glatt.) Wir berechnen

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= x_2^2, & \text{also } D_2 D_1 f(x) &= D_2(D_1 f)(x) = 2x_2, \\ D_2 f(x) &= x_1 \cdot 2x_2, & \text{also } D_1 D_2 f(x) &= 2x_2 = D_2 D_1 f(x). \end{aligned}$$

In diesem Beispiel haben wir also die Aussage des Satzes 3.51 durch eine direkte Rechnung gezeigt.

**Bemerkung.** [Vertauschen partieller Differentiationen] Die Aussage des Satzes 3.51 ist falsch, falls wir nur voraussetzen, dass  $f$  zweimal partiell differenzierbar ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nämlich zweimal partiell differenzierbar mit

$$\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_y \partial_x f(0, 0).$$

(Rechnen Sie das nach!)

Aus Satz 3.51 folgt, dass die Reihenfolge partieller Differentiationen keine Rolle spielt, falls die gegebene Funktion genügend oft stetig partiell differenzierbar ist. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Sei  $m \in \mathbb{N}$ .

**Korollar 3.52** (Vertauschen partieller Differentiationen). *Partielle Differentiationen dürfen beliebig vertauscht werden, falls eine  $C^m$ -Funktion insgesamt  $m$ -mal partiell differenziert wird.*

Beweis: Das folgt aus Satz [3.51](#).

**Bemerkungen.** [Vertauschen partieller Differentiationen] Zum Beispiel gilt, dass

$$D_2 D_5 D_3 f = D_5 D_3 D_2 f,$$

falls  $f \in C^3$  ist.

Eine weitere Anwendung von Satz [3.51](#) ist Satz [3.42\(i\)](#), welcher besagt, dass jedes konservative  $C^1$ -Vektorfeld  $X$  die Integrabilitätsbedingung [\(3.35\)](#) erfüllt, also

$$D_i X^j = D_j X^i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

**Beweis von Satz [3.42\(i\)](#):** Da  $X$  konservativ ist, besitzt es ein Potential, also eine differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\nabla f = X$ . Da  $X$  (von der Klasse)  $C^1$  ist, ist  $f \in C^2$ . Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\begin{aligned} D_i X^j &= D_i D_j f && \text{(wegen } \nabla f = X) \\ &= D_j D_i f && \text{(gemäß Satz [3.51](#), da } f \in C^2 \text{ ist)} \\ &= D_j X^i && \text{(wegen } \nabla f = X). \end{aligned}$$

D. h.,  $X$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung [\(3.35\)](#). Das beweist Satz [3.42\(i\)](#).  $\square$

Sei  $m \in \{-1, 0, 1, \dots\}$ . Wie im eindimensionalen Fall können wir eine  $C^m$ -Funktion  $f$  durch ihre Taylorformel ausdrücken. Das ist der Inhalt des nächsten Satzes. In der Taylorformel kommt das Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung von  $f$  vor. Aus der Formel folgt, dass das Taylorpolynom die Funktion  $f$  annähert. Da Polynome einfache Funktionen sind, werden Funktionen in vielen Anwendungen daher näherungsweise durch ihre Taylorpolynome ersetzt.

Seien  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ . Im Fall  $k = 0$  haben wir die leere Liste von Zahlen. Wir schreiben

$$\prod_{i=1}^k a_i := a_1 \cdots a_k$$

für das Produkt dieser Zahlen. Im Fall  $k = 0$  nennen wir  $\prod_{i=1}^{k=0} a_i$  das *leere Produkt*. Das ist das Produkt aller Zahlen in der leeren Liste. Wir verwenden dann die Konvention

$$\prod_{i=1}^{k=0} a_i := 1.$$

Seien  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \Omega$ . Falls  $m \geq 0$ , dann nehmen wir an, dass  $f$   $m$ -mal partiell differenzierbar ist.

**Definition 3.53** (Taylorpolynom). *Wir definieren das Taylorpolynom von  $f$   $m$ -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt  $x_0$  als die Funktion  $T_{f,x_0}^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch* 23

$$\begin{aligned}
 T_{f,x_0}^m(x) &:= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k (x - x_0)^{i_j} \\
 &= f(x_0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)^{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)^{i_1} (x - x_0)^{i_2} \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n D_{i_m} \cdots D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)^{i_1} \cdots (x - x_0)^{i_m}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

**Bemerkungen.** [Taylorpolynom]

- In dieser Formel tritt  $k! := \prod_{i=1}^k i = 1 \cdot 2 \cdots k$  ( $k$  Fakultät) auf. Im Fall  $k = 0$  ist das das leere Produkt  $0! = 1$ .
- Im Fall  $m = -1$  ist die rechte Seite von (3.45) eine leere Summe. Diese ist als 0 definiert. Daher ist

$$T_{f,x_0}^{-1} \equiv 0.$$

- Im Fall  $m = 0$  ist

$$T_{f,x_0}^0 \equiv f(x_0).$$

- Im Fall  $m = 1$  ist

$$\begin{aligned}
 T_{f,x_0}^1(x) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) (x - x_0)^i \\
 &= f(x_0) + df(x_0)(x - x_0).
 \end{aligned}$$

Das ist die beste affine Näherung von  $f$  im Punkt  $x_0$ , die wir in (3.10) kennengelernt haben. Das Taylorpolynom verallgemeinert also die beste affine Näherung.

- In [Stra] Bemerkung 7.5.3, S. 174] wird die Notation

$$T_m f(x, x_0) := T_{f,x_0}^m(x)$$

verwendet.

---

<sup>23</sup>Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  und jeden Index  $i = 1, \dots, n$  bezeichnet  $v^i$  hier die  $i$ -te Koordinate von  $v$ .

**Beispiel 3.54.** [Taylorpolynom] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(\|x\|^2).$$

Wir berechnen das Taylorpolynom von  $f$   $m$ -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt  $x_0 := 0$  für  $m = 0, 1, 2$ . Dazu berechnen wir mittels der Kettenregel und der Leibnizregel (=Produktregel)

$$D_i f(x) = \cos(\|x\|^2) \cdot 2x_i, \quad D_j D_i f(x) = -\sin(\|x\|^2) \cdot 2x_j \cdot 2x_i + \cos(\|x\|^2) \cdot 2\delta_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

$$\text{wobei} \quad \delta_{ji} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Daraus folgt, dass

$$T_{f, x_0=0}^0(x) = f(0) = 0, \quad T_{f, x_0=0}^1(x) = f(0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(0)(x-0)_{i_1} = 0 + 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{f, x_0=0}^2(x) &:= f(0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(0)(x-0)_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(0)(x-0)_{i_1} (x-0)_{i_2} \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2x_i^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

In der Formel (3.45) für das Taylorpolynom kommen viele gleiche Terme vor. Zum Beispiel enthält sie für  $k = 2$ ,  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 2$  die beiden Terme

$$\frac{1}{2} D_2 D_1 f(x_0)(x-x_0)^1 (x-x_0)^2, \quad \frac{1}{2} D_1 D_2 f(x_0)(x-x_0)^2 (x-x_0)^1,$$

die gemäss dem Satz von Schwarz 3.51 gleich sind. Wir brauchen daher nicht alle höheren partiellen Ableitungen auszurechnen, um ein Taylorpolynom zu berechnen. Mit Hilfe sogenannter Multi-Indizes können wir das Taylorpolynom so umschreiben, dass solche Terme zusammengefasst werden. Ein *Multi-Index* ist ein Element  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multi-Index. Wir schreiben

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n && =: \text{Ordnung (= Länge) von } \alpha, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\ \binom{k}{\alpha} &:= \frac{k!}{\alpha!} && \text{(für } k := |\alpha|, \text{ Multinomialkoeffizient),} \\ v^\alpha &:= v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}, && \forall v \in \mathbb{R}^n, \\ \partial^\alpha &:= D^\alpha := D_n^{\alpha_n} \cdots D_1^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

**Beispiel.** [Multi-Index-Schreibweise] Für  $n = 3$ ,  $\alpha := (0, 3, 2) \in \mathbb{N}_0^3$  und  $v := (2, -1, 4)$  gilt

$$\begin{aligned} k &:= |\alpha| = 0 + 3 + 2 = 5, \\ \alpha! &= 0! \cdot 3! \cdot 2! = 12, \\ \binom{k}{\alpha} &= \frac{5!}{0! \cdot 3! \cdot 2!} = 10, \\ v^\alpha &= (2, -1, 4)^{(0,3,2)} = 2^0 \cdot (-1)^3 \cdot 4^2 = -16, \\ D^\alpha &= D_2^3 D_3^2 = D_2 D_2 D_2 D_3 D_3. \end{aligned}$$

Seien  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^m(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.55** (Taylorpolynom in Multi-Index-Schreibweise). *Das Taylorpolynom  $T_{f,x_0}^m$  ist gegeben durch*

$$T_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Bemerkung.** Diese Proposition entspricht [Stra] Bemerkung 7.5.3]. Dort steht für  $k = m$  anstelle von  $\frac{1}{\alpha!}$  der falsche Faktor  $\frac{1}{m!}$ .

Diese Proposition folgt unmittelbar aus dem nächsten Lemma. Seien  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^k(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Lemma 3.56** (partielle Ableitungen und Multi-Indizes). *Es gilt*

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k v_{i_j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(x_0) v^\alpha. \quad (3.46)$$

**Beweis von Lemma 3.56:** Für jedes  $k$ -Tupel  $I = (I_1, \dots, I_k) \in \{1, \dots, n\}^k$  definieren wir den Multi-Index  $\alpha^I \in \mathbb{N}_0^n$  durch

$$\alpha_i^I := \text{Anzahl } j \in \{1, \dots, k\}, \text{ sodass } I_j = i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.47)$$

Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . Wir schreiben  $k := |\alpha|$ . Es gilt

$$\text{Anzahl } I \in \{1, \dots, n\}^k, \text{ sodass } \alpha^I = \alpha = \binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}. \quad (3.48)$$

Das folgt mittels Induktion über  $n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k v_{i_j} \\ = & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \sum_{I \in \{1, \dots, n\}^k: \alpha^I = \alpha} D_n^{\alpha_n} \cdots D_1^{\alpha_1} f(x_0) v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n} \\ & \text{(aufgrund des Satzes 3.51 (Schwarz) und weil Multiplikation von Zahlen kommutativ ist)} \\ = & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(x_0) v^\alpha. \end{aligned}$$

Das beweist (3.46) und schliesst den Beweis von Lemma 3.56 und damit von Proposition 3.55 ab.  $\square$

**Bemerkungen.** [Multi-Indizes, Formel (3.48)]

- Anschaulich können wir die Formel (3.48) wie folgt interpretieren. Wir fassen die Zahlen  $1, \dots, n$  als *Buchstaben* auf und betrachten die Menge  $\{1, \dots, n\}$  als ein *Alphabet*. Jedes  $I = (I_1, \dots, I_k) \in \{1, \dots, n\}^k$  ist ein *Wort der Länge  $k$*  im Alphabet  $\{1, \dots, n\}$ . (Wir denken uns dabei die Klammern und die Kommas weg.) Auf der linken Seite der Formel (3.48) tritt die Menge

$$\{I \in \{1, \dots, n\}^k \mid \alpha^I = \alpha\} \quad (3.49)$$

auf, welche anschaulich aus allen Wörtern der Länge  $k$  im Alphabet  $\{1, \dots, n\}$  besteht, in denen genau  $\alpha_1$  mal der Buchstabe 1,  $\alpha_2$  mal der Buchstabe 2 u.s.w. vorkommt. (Vergleiche mit (3.47).) Formel (3.48) sagt, dass diese Menge  $\binom{k}{\alpha}$  Elemente besitzt.

- Wir fixieren die Wortlänge  $k$  und stellen uns eine Reihe mit  $k$  leeren Quadraten vor. Jedes Wort in (3.49) entspricht einer Möglichkeit, genau  $\alpha_1$  Quadrate mit dem Buchstaben 1 zu füllen,  $\alpha_2$  Quadrate mit dem Buchstaben 2 u.s.w. . Es entspricht also einer Wahl einer Menge  $S_1$  von  $\alpha_1$  Quadraten, einer Menge  $S_2$  von  $\alpha_2$  Quadraten u.s.w. . Die Anzahl aller solcher Wahlen ist  $\binom{k}{\alpha}$ . Das ist eine *kombinatorische* Aussage, die mittels Induktion über die Länge  $n$  unseres Alphabets bewiesen werden kann.
- Wir betrachten den Fall  $n = 2$ . Dann entspricht eine Wahl wie oben genau einer Wahl von  $\alpha_1$  Quadraten. Wie Sie in der Mittelschule gelernt haben, ist die Anzahl

solcher Wahlen gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{k}{\alpha_1} = \frac{k!}{\alpha_1!(k - \alpha_1)!} = \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!} = \binom{k}{\alpha}.$$

Das stimmt mit der Formel (3.48) überein.

- Der Multinomialkoeffizient  $\binom{k}{\alpha}$  tritt im *Multinomialsatz* auf, welcher besagt, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha.$$

$\binom{k}{\alpha}$  ist also der Koeffizient vor dem Term  $x^\alpha$  in der Entwicklung der  $k$ -ten Potenz der Summe  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n$ . Im Fall  $n = 2$  ist der Multinomialsatz der *binomische Lehrsatz*. Das erklärt den Namen *Multinomialkoeffizient*.

Seien  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$  und  $x_0, x \in \Omega$ , sodass

$$x_t := (1 - t)x_0 + tx \in \Omega, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Satz 3.57** (Taylorformel). *Es gibt eine Zahl  $\theta \in (0, 1)$ , sodass gilt*

$$f(x) = T_{f,x_0}^m(x) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_\theta)(x - x_0)^\alpha. \quad (3.50)$$

Beweis: [Stra, Satz 7.5.2, S. 174]

**Bemerkungen.** [Taylorformel]

- Die Aussage des Satzes gilt auch im Fall  $m = -1$ , falls wir  $\theta = 1$  ebenfalls zulassen. (3.50) besagt dann, dass

$$f(x) = T_{f,x_0}^{-1}(x) + f(x_\theta) = 0 + f(x_\theta).$$

Diese Gleichheit stimmt für  $\theta = 1$ .

- Im Fall  $m = 0$  sagt der Satz, dass es ein  $\theta$  gibt, sodass

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_\theta)(x - x_0).$$

Im Fall  $n = 1$  ist das die Aussage des Mittelwertsatzes aus Analysis 1.

- Im Fall  $n = 1$  haben Sie Satz [3.57](#) in Analysis 1 gesehen. Siehe [Stra](#), Satz 5.5.1, S. 96]. (Überzeugen Sie sich, dass die obige Formel und die Formel in [Stra](#), Satz 5.5.1, S. 96] in diesem Fall übereinstimmen!)

**Definition 3.58** (Restglied). *Wir definieren das Restglied von  $f$   $m$ -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt  $x_0$  als die Funktion*

$$R_{f,x_0}^m := f - T_{f,x_0}^m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Bemerkung.** In [Stra](#), Bemerkung 7.5.4 i), S. 174] wird das Restglied mit  $r_m f(\cdot; x_0)$  bezeichnet.

Sei  $r \in (0, \infty)$ , sodass  $\overline{B}_r^n(x_0) \subseteq \Omega$ . Wir definieren

$$C_m := C_{m,f,x_0,r} := \frac{n^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!} \max \left\{ |D^\alpha f(y)| \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m+1, y \in \overline{B}_r^n(x_0) \right\}.$$

Auf der rechten Seite tritt das Maximum der Zahlen  $|D^\alpha f(y)|$  auf, wobei  $\alpha$  über alle Elemente von  $\mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| = m+1$  läuft und  $y$  über alle Elemente von  $\overline{B}_r^n(x_0)$  läuft. Dieses Maximum existiert, da gemäss Korollar [2.14](#) jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein Maximum besitzt.

**Proposition 3.59** (Restglied). *Es gilt*

$$|R_{f,x_0}^m(x)| \leq C_m \|x - x_0\|^{m+1}, \quad \forall x \in \overline{B}_r^n(x_0).$$

Beweis: Das folgt aus Satz [3.57](#).

**Bemerkung.** [Taylornäherung, Restglied] Wir sagen, dass eine Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f$  (um den Punkt  $x_0$ ) in  $m$ -ter Ordnung nähert, falls

$$\frac{f(x) - g(x)}{\|x - x_0\|^m} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0.$$

Gemäss Proposition [3.59](#) gilt

$$\frac{f(x) - T_{f,x_0}^m(x)}{\|x - x_0\|^m} \leq C_m \|x - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0$$

(falls  $f$   $C^{m+1}$  ist). Daher nähert das Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung die Funktion  $f$  in  $m$ -ter Ordnung. Den Unterschied  $f - T_{f,x_0}^m$ , also das Restglied, können wir als Fehler dieser Näherung sehen. Dieser Fehler hat die Ordnung  $m+1$ , d. h., er ist durch eine Konstante mal  $r_x^{m+1}$  beschränkt, wobei

$$r_x := \|x - x_0\|$$

der Euklidische Abstand zwischen  $x_0$  und  $x$  ist. Zum Beispiel nähert das Taylorpolynom nullter Ordnung die Funktion bis auf einen linearen Fehler. Das Taylorpolynom erster Ordnung nähert die Funktion bis auf einen quadratischen Fehler, u.s.w. .

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \Omega$ .

**Definition 3.60** (strikte lokale Extremalstelle). *Wir nennen  $x_0$  eine lokale Minimalstelle von  $f$  g. d. w. es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $\Omega$  gibt, sodass*

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

*Wir nennen  $x_0$  eine strikte lokale Minimalstelle von  $f$  g. d. w. diese Bedingung mit “ $\geq$ ” ersetzt durch “ $>$ ” erfüllt ist.*

*Wir nennen  $x_0$  eine (strikte) lokale Maximalstelle von  $f$  g. d. w. die analoge Bedingung mit “ $\geq$ ” (“ $>$ ”) ersetzt durch “ $\leq$ ” (“ $<$ ”) erfüllt ist.*

*Wir nennen  $x_0$  eine (strikte) lokale Extremalstelle von  $f$  g. d. w.  $x_0$  eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.*

**Bemerkung.** [lokal] Das Wort *lokal* bedeutet *in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung des gegebenen Punktes*. Eine lokale Extremalstelle  $x_0$  von  $f$  ist also eine Extremalstelle von  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$ .

**Bemerkung.** [lokales Minimum der potentiellen Energie und Stabilität] In der Physik sind lokale Extrema zum Beispiel darum wichtig, weil eine gegebene Lage eines statischen mechanischen System stabil ist, falls die potentielle Energie in dieser Lage ein striktes lokales Minimum annimmt.

Sei  $x_0 \in \Omega$  ein Punkt, in dem  $f$  differenzierbar ist.

**Definition 3.61** (kritischer Punkt).  $x_0$  heisst kritischer (oder stationärer) Punkt von  $f$  g. d. w. die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  verschwindet, d. h.

$$df(x_0) = 0.$$

**Bemerkung 3.62.** [kritischer Punkt] Im Fall  $n = 1$  ist  $x_0$  genau dann ein kritischer Punkt von  $f$ , wenn  $f'(x_0) = 0$ .

Sei jetzt  $f \in C^2(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$ .

**Definition 3.63** (Hesse-Matrix). *Wir definieren die Hesse-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_0$  als die quadratische Matrix*

$$\text{Hess}_f(x_0) := (D_i D_j f(x_0))_{i,j=1}^n.$$

**Bemerkungen.** • Gemäss dem Schwarz 3.51 ist die Hesse-Matrix symmetrisch, d. h.

$$\text{Hess}_f(x_0)_{ij} = \text{Hess}_f(x_0)_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

•

**Beispiel 3.64.** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Die Hesse-Matrix von  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  ist gegeben durch

$$\text{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 3.65.** [Hesse-Matrix] Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Die Hesse-Matrix von  $f$  in  $x_0$  ist gegeben durch

$$\text{Hess}_f(x_0) = (f''(x_0)).$$

Erinnerung an die lineare Algebra:

**Bemerkungen 3.66.** (i) Eine reelle quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst *positiv definit* g. d. w.

$$v^T A v > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Sie heisst *negativ definit* g. d. w.

$$v^T A v < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(ii) Im Fall  $n = 1$  ist  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$  genau dann positiv (negativ) definit, falls  $A > 0$  ( $A < 0$ ).

**Satz 3.67** (lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix). (i) (Satz von Fermat über kritische Punkte) Falls  $x_0 \in \Omega$  eine lokale Extremalstelle von  $f$  ist, dann ist  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$ .

(ii) Falls  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist und die Hesse-Matrix  $\text{Hess}_f(x_0)$  positiv (negativ) definit ist, dann ist  $x_0$  eine strikte lokale Minimalstelle (Maximalstelle) von  $f$ .

Beweis von (ii): [Stra] Satz 7.5.3, S. 175]

Beweis von (i): S. 119]

**Bemerkungen.** [kritischer Punkt, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix im Fall  $n = 1$ ]

- Teil (i) des Satzes 3.67 ist nach Pierre de Fermat benannt, siehe Abbildung 3.6



Abbildung 3.6: Pierre de Fermat, 1607–1665, französischer Mathematiker und Jurist.

- Wir betrachten den Fall  $n = 1$ . Wir nehmen an, dass  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist. Gemäss Bemerkung 3.62 bedeutet das, dass  $f'(x_0) = 0$ . Wir nehmen an, dass  $f''(x_0) > 0$ . Gemäss Bemerkungen 3.65 und 3.66(ii) ist  $\text{Hess}_f(x_0)$  dann positiv definit. Gemäss Satz 3.67(ii) ist  $x_0$  daher eine strikte lokale Minimalstelle von  $f$ .

Das wussten Sie schon aus Analysis 1, siehe [Stra, Korollar 5.5.1, S. 98]. Satz 3.67 verallgemeinert ein Resultat aus Analysis 1 auf mehrere Dimensionen.

**Beweis von Satz 3.67(i):** Wir nehmen an, dass  $x_0 \in \Omega$  eine lokale Extremalstelle von  $f$  ist.

**Fall:  $x_0$  ist eine lokale Minimalstelle.** Sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren

$$x(t) := x_0 + tv, \quad g := f \circ x.$$

Da  $x_0$  eine lokale Minimalstelle von  $f$  ist, ist  $t = 0$  eine lokale Minimalstelle von  $g$ . (Überlegen Sie sich das!) Gemäss einem Resultat aus Analysis 1 ([Stra, Korollar 5.5.1, S. 98]) gilt daher

$$0 = \dot{g}(0). \tag{3.51}$$

Andererseits gilt gemäss der Kettenregel (Satz 3.12), dass

$$\dot{g}(0) = df(x(0))\dot{x}(0) = df(x_0)v.$$

Indem wir das mit (3.51) kombinieren, erhalten wir

$$0 = df(x_0)v.$$

Da  $v$  beliebig ist, folgt daraus, dass

$$df(x_0) = 0.$$

**Fall:  $x_0$  ist eine lokale Maximalstelle:** analog.

Das beweist Satz 3.67(i).  $\square$

**Beispiele 3.68.** [(keine) lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix]

(i) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|^2.$$

Siehe Abbildung 3.7 im Fall  $n = 2$ .

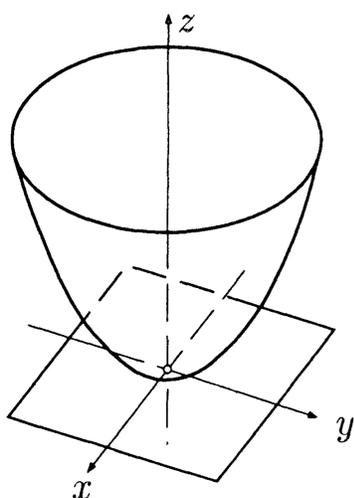


Abbildung 3.7:  
 $f(x) := \|x\|^2$ ,  $x_0 = 0$ :  
lokale Minimalstelle.

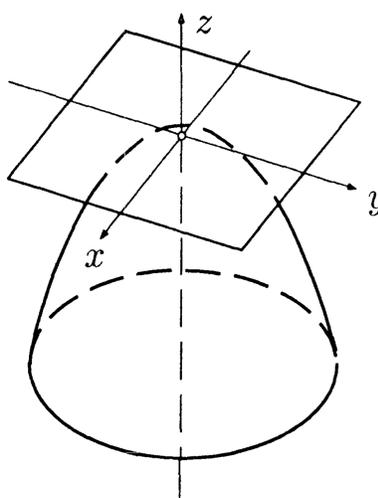


Abbildung 3.8:  
 $f(x) := -\|x\|^2$ ,  $x_0 = 0$ :  
lokale Maximalstelle.

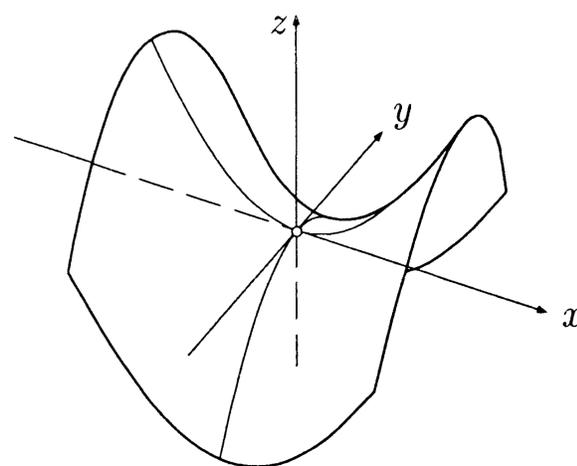


Abbildung 3.9:  
 $f(x) := x_1^2 - x_2^2$ ,  
 $x_0 = 0$ : Sattelpunkt.

Wir bestimmen die kritischen Punkte von  $f$ . Dazu berechnen wir ihre Ableitung:

$$df(x) = (2x_1 \quad \cdots \quad 2x_n).$$

Die Bedingung  $df(x_0) = 0$  ist genau für  $x_0 = 0$  erfüllt. Also ist  $x_0 = 0$  der einzige kritische Punkt von  $f$ .

Um zu überprüfen, ob dieser Punkt eine lokale Extremalstelle ist, berechnen wir die Hesse-Matrix von  $f$ :

$$\text{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt

$$v^T \text{Hess}_f(x_0 = 0)v = \sum_{i=1}^n v_i \cdot 2v_i = 2\|v\|^2 > 0.$$

Daher ist  $\text{Hess}_f(0)$  positiv definit. Gemäss Satz 3.67(ii) ist  $x_0$  daher eine strikte lokale Minimalstelle von  $f$ .

In diesem Beispiel können wir das auch einfach direkt überprüfen. Des Weiteren ist es auch aus der Abbildung 3.7 ersichtlich.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := -\|x\|^2.$$

Siehe Abbildung 3.8 im Fall  $n = 2$ . Diese Funktion besitzt genau den kritischen Punkt  $x_0 = 0$ . Dieser Punkt ist eine lokale Maximalstelle. Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument.

(iii) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1^2 - x_2^2.$$

Siehe Abbildung 3.9. Diese Funktion besitzt genau den kritischen Punkt  $x_0 = 0$ . Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument. Der Punkt  $x_0 = 0$  ist keine lokale Extremalstelle. Das ist aus der Zeichnung ersichtlich. (Warum?) In Beispiel 3.72 werden wir diese Aussage beweisen.

(iv) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1^2 + x_2^4.$$

Analog zum vorherigen Beispiel ist der einzige kritische Punkt von  $f$  gegeben durch  $x_0 = 0$ . (Überprüfen Sie das!) Die Hesse-Matrix von  $f$  ist gegeben durch

$$\text{Hess}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt  $x = x_0 = 0$ .  $\text{Hess}_f(0)$  ist nicht positiv definit, da für  $v := (0, 1)$  gilt

$$v^T \text{Hess}_f(0)v = 0.$$

$\text{Hess}_f(0)$  ist auch nicht negativ definit. Wir können daher Satz 3.67(ii) nicht anwenden.

Es gilt jedoch  $f(x) > 0$  für alle  $x \neq 0$ . (Überprüfen Sie das!) Daher ist  $x_0 = 0$  eine strikte lokale Minimalstelle.

**Bemerkung.** Die Umkehrung von [3.67\(ii\)](#) besagt, dass für jede strikte lokale Minimalstelle  $x_0$  von  $f$  die Hesse-Matrix  $\text{Hess}_f(x_0)$  positiv definit ist. Aufgrund des letzten Beispiels ist diese Umkehrung *falsch*.

Wir betrachten jetzt den Fall  $n = 2$ .

**Proposition 3.69** (positive und negative Definitheit in zwei Dimensionen). *Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine symmetrische Matrix.*

(i)  *$A$  ist positiv definit g. d. w.*

$$\det(A) > 0 \quad \text{und} \quad A_{11} > 0 \tag{24}$$

(ii)  *$A$  ist negativ definit g. d. w.*

$$\det(A) > 0 \quad \text{und} \quad A_{11} < 0.$$

Beweis: [\[Bla96\]](#) (5.8), S. 158].

**Bemerkung.** [positive Definitheit] Für ein allgemeines  $n \in \mathbb{N}$  ist eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  genau dann positiv definit, wenn sie das *Sylvester-Kriterium*<sup>25</sup> erfüllt. Dieses Kriterium ist die Eigenschaft, dass alle führenden Hauptminoren von  $A$  positiv sind. (Siehe lineare Algebra.)

**Beispiel.** [positive Definitheit der Hesse-Matrix, strikte lokale Minimalstelle] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Der einzige kritische Punkt von  $f$  ist  $x_0 = 0$ . (Überprüfen Sie das!) Gemäss [Beispiel 3.64](#) gilt

$$\text{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(\text{Hess}_f(x_0)) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0, \quad \text{Hess}_f(x_0)_{11} = 2 > 0.$$

Gemäss [Proposition 3.69](#) ist  $\text{Hess}_f(x_0)$  daher positiv definit. Gemäss [Satz 3.67\(ii\)](#) ist  $x_0 = 0$  daher eine strikte lokale Minimalstelle von  $f$ .

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \Omega$  ein Punkt, in dem  $f$  differenzierbar ist.

<sup>24</sup> $A_{ij}$  bezeichnet den  $(i, j)$ -ten Eintrag von  $A$ .

<sup>25</sup>Manchmal wird dafür die Bezeichnung *Hurwitz-Kriterium* verwendet.

**Definition 3.70.**  $x_0$  heisst ein Sattelpunkt von  $f$  g. d. w.  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $f$  und keine lokale Extremalstelle von  $f$  ist.

**Bemerkungen 3.71.** [Sattelpunkt, Indefinitheit der Hesse-Matrix]

- (i) Ein kritischer Punkt  $x_0$  von  $f$  ist ein Sattelpunkt g. d. w. es in jeder Umgebung von  $x_0$  sowohl einen Punkt gibt, in dem  $f$  grösser als in  $x_0$  ist, als auch einen Punkt gibt, in dem  $f$  kleiner als in  $x_0$  ist.

Sei jetzt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle quadratische Matrix.

- (ii)  $A$  heisst *indefinit* g. d. w. es Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  gibt, sodass

$$v^T A v > 0, \quad w^T A w < 0.$$

- (iii) Wir nehmen jetzt an, dass  $n = 2$  und  $A$  symmetrisch ist. Dann ist  $A$  indefinit g. d. w.  $\det A < 0$ .

- (iv) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Falls die Hesse-Matrix  $\text{Hess}_f(x_0)$  indefinit ist, dann ist  $x_0$  ein Sattelpunkt. Das folgt aus [Stra Bemerkung 7.5.4 i)]. Gemäss (iii) ist  $x_0$  also ein Sattelpunkt, falls

$$n = 2, \quad \det(\text{Hess}_f(x_0)) < 0.$$

**Beispiel 3.72.** [Indefinitheit der Hesse-Matrix, Sattelpunkt] Wir betrachten die Funktion

$$f : \Omega := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1^2 - x_2^2.$$

Siehe Abbildung 3.9 Der Punkt  $x_0 := 0$  ist ein kritischer Punkt von  $f$ . (Überprüfen Sie das!) Es gilt

$$\text{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \det(\text{Hess}_f(x_0)) = -4 < 0.$$

Gemäss Bemerkung 3.71(iv) ist  $x_0 = 0$  daher ein Sattelpunkt.



# Kapitel 4

## Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

### 4.1 $C^k$ -Diffeomorphismus, Umkehrsatz

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, Abschnitte 7.7]. Darin lernen wir zwei grundlegende Werkzeuge der Analysis kennen, nämlich den Umkehrsatz und den Satz über implizite Funktionen. Der Umkehrsatz gibt Bedingungen an, unter denen wir eine Gleichung der Form

$$f(x) = y$$

nach  $x$  auflösen können, falls  $y$  nahe bei einem Punkt  $y_0$  liegt, für den eine Lösung  $x$  der Gleichung  $f(x) = y_0$  existiert. Der Satz über implizite Funktionen gibt Bedingungen an, unter denen die Lösung einer Gleichung auf eine  $C^k$ -Weise von Parametern abhängt.

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wir nehmen an, dass es für  $y = y_0$  eine Lösung  $x_0 \in S$  der folgenden Gleichung gibt:

$$f(x) = y. \tag{4.1}$$

**Frage.** *Unter welchen Bedingungen an  $f$  gibt es eine Lösung dieser Gleichung für  $y$  nahe bei  $y_0$ ?*

**Frage.** *Unter welchen Bedingungen ist diese Lösung eindeutig?*

**Frage.** *Wie hängt sie von  $y$  ab?*

Satz [4.3](#) gibt Antworten auf diese Fragen. Um ihn zu formulieren, brauchen wir das Folgende. Seien  $X_0, Y_0$  Mengen,  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  eine Abbildung,  $X \subseteq X_0$  und  $Y \subseteq Y_0$ , sodass  $f(X) \subseteq Y$ <sup>1</sup>

$$f : X \rightarrow Y, \tag{4.2}$$

die *Einschränkung von  $f$  auf  $X$  und  $Y$*  ist die Abbildung mit Definitionsbereich  $X$ , Zielbereich<sup>2</sup>  $Y$  und Graph gegeben durch  $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ .  $f : X \rightarrow Y$  ist also die gleiche Funktion wie  $f$ , ist aber nur auf  $X$  definiert und besitzt einen verkleinerten Zielbereich. Im Fall  $Y = Y_0$  schreiben wir

$$f|_X := f \upharpoonright_X := f : X \rightarrow Y_0$$

für diese Einschränkung. Seien  $A, B$  Mengen und  $g : A \rightarrow B$  eine *injektive* Funktion. Wir definieren die *Umkehrung* (*Umkehrabbildung* oder *Inverse*) von  $g$  als die Funktion

$$g^{-1} : g(A) \rightarrow A, \quad g^{-1}(b) := \text{eindeutiges } a \in A, \text{ sodass } g(a) = b. \tag{4.3}$$

Seien jetzt  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  offene Teilmengen und  $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ .

**Definition 4.1** ( $C^k$ -Diffeomorphismus). *Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heisst  $C^k$ -Diffeomorphismus g. d. w. sie bijektiv und  $C^k$  ist und ihre Umkehrung  $C^k$  ist. Wir nennen einen  $C^\infty$ -Diffeomorphismus einen glatten Diffeomorphismus oder einfach einen Diffeomorphismus.*

**Beispiele.** Die folgenden Abbildungen sind (glatte) Diffeomorphismen:

- Jeder lineare Isomorphismus zwischen zwei Vektorräumen.
- Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty).$$

**Bemerkung 4.2.** [Umkehren und ableiten] Falls  $f$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, dann ist für jedes  $x \in U$   $Df(x)$  invertierbar und

$$D(f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}, \quad \forall y \in V. \tag{4.4}$$

Um das zu zeigen, sei  $x \in U$ . Gemäss der Kettenregel ([Satz 3.12](#)) gilt, dass

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbb{R}^n} &= D \text{id}_U(x) = D(f^{-1})(f(x))Df(x), \\ \text{id}_{\mathbb{R}^p} &= D \text{id}_V(f(x)) = Df(x)D(f^{-1})(f(x)). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $Df(x)$  invertierbar ist und dass die Gleichheit [\(4.4\)](#) gilt. Falls  $U \neq \emptyset$ , folgt daraus, dass die Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^p$  isomorph sind (mittels  $Df(x)$ ) und darum, dass  $n = p$ .

<sup>1</sup> $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  ist das Bild von  $X$  unter  $f$ .

<sup>2</sup>In [\[Stra\]](#) Definition 1.3.1, p. 8] wird der Zielbereich der *Bild-* oder *Wertebereich* genannt.

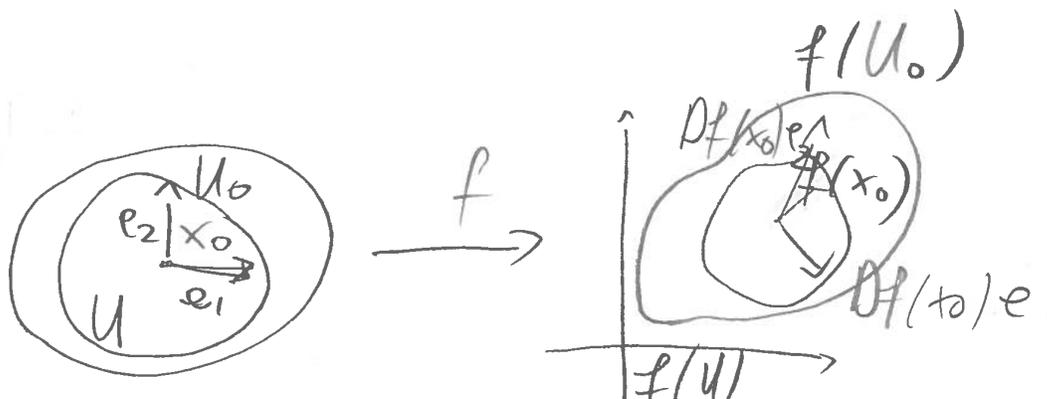


Abbildung 4.1: Umkehrsatz mit  $n = 2$ . Wir nehmen an, dass  $Df(x_0)$  invertierbar ist, d. h., dass die Vektoren  $Df(x_0)e_1$  und  $Df(x_0)e_2$  linear unabhängig sind.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

**Satz 4.3** (Umkehrsatz). Seien  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $f \in C^k(U_0, \mathbb{R}^n)$  und  $x_0 \in U_0$  ein Punkt, sodass  $Df(x_0)$  invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq U_0$  von  $x_0$ , sodass  $f(U)$  offen ist und die Einschränkung

$$f : U \rightarrow f(U)$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.

Beweis: [Stra, Satz 8.7.1, S. 229].

Abbildung 4.1 verdeutlicht diesen Satz.

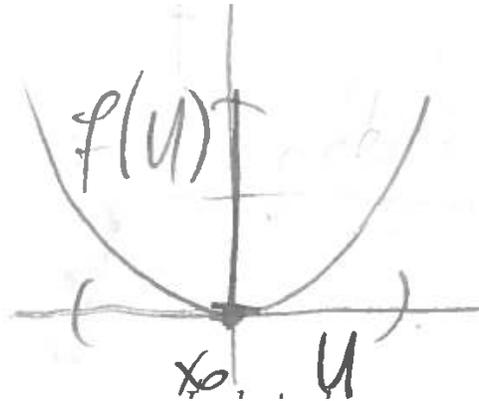
**Bemerkungen 4.4.** • Eine offene Umgebung eines Punktes in  $\mathbb{R}^n$  ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die den Punkt enthält. (Vergleiche mit Definition 2.30.)

- Dieser Satz liefert Antworten auf die Fragen 4.1, 4.1 und 4.1 (S. 125).
- Er verallgemeinert das folgende Resultat aus Analysis 1: Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Falls  $f' \neq 0$ , dann ist  $f$  injektiv und  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  differenzierbar. Siehe [Stra, Satz 6.2.2, S. 117, und Beispiel 8.7.1. i), S. 229].
- Bemerkung 4.2 impliziert:
 

“ $f$   $C^1$ -Diffeomorphismus  $\implies Df(x_0)$  invertierbar”

Die Umkehrung davon lautet:

“ $Df(x_0)$  invertierbar  $\implies f$   $C^1$ -Diffeomorphismus”

Abbildung 4.2: Um  $x_0$  besitzt  $f$  keine Umkehrung.

Für  $k = 1$  ist das die Aussage des Satzes [4.3](#), ausser, dass der Satz nur eine *lokale* Aussage macht, nämlich, dass  $f$  auf einer (kleinen) Umgebung von  $x_0$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist.

Der Satz liefert also eine “lokale” Umkehrung der Bemerkung [4.2](#).

- Satz [4.3](#) sagt unter anderem, dass es Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V (= f(U))$  von  $y_0$  gibt, sodass  $f : U \rightarrow V$  bijektiv ist. Schon das ist eine bemerkenswerte Aussage.
- Die Bedingung, dass  $Df(x_0)$  invertierbar ist, ist notwendig. Um das einzusehen, betrachten wir einen Punkt  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  und die konstante Abbildung  $f \equiv y_0$ . Ein anderes Beispiel ist durch eine nicht invertierbare lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Noch ein Beispiel ist durch die Abbildung

$$f : U_0 := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$$

und den Punkt  $x_0 := 0$  gegeben. Siehe Abbildung [4.2](#).

- Im Allgemeinen können wir nicht  $U = U_0$  wählen. Betrachte zum Beispiel  $f : U_0 := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$  und  $x_0 = 1$ .
- Für den Satz [4.3](#) brauchen wir, dass  $f$  *stetig* differenzierbar ist. Falls wir nur voraussetzen, dass  $f$  differenzierbar ist, dann ist die Aussage des Satzes [4.3](#) falsch. Um das zu sehen, wählen wir eine nicht injektive differenzierbare Funktion  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $g(x) = x$  für  $x \leq \frac{1}{3}$  und  $x \geq \frac{2}{3}$ . (Überlegen Sie sich, dass es ein solches  $g$  gibt! Es gibt sogar eine glatte solche Funktion.) Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  definieren wir  $I_j := (\frac{1}{j}, \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2})$ . Wir definieren  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{j} + \frac{g(j^2x - j)}{j^2}, & \text{falls } x \in I_j, \\ x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. (Für  $x = 0$  folgt das aus der Definition der Differenzierbarkeit in einer Variable.) Es gilt  $f'(0) = 1$ , darum ist  $Df(0) = f'(0)$  invertierbar.  $f$  erfüllt daher die Voraussetzungen des Umkehrsatzes mit  $k = 1$ , bis auf die Voraussetzung, dass  $f$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $j \in \mathbb{N}$ . Da  $g$  nicht injektiv ist, ist die Einschränkung von  $f$  auf  $I_j$  nicht injektiv. Daher gibt es keine Umgebung von 0, worauf  $f$  injektiv ist. Die Aussage des Satzes 4.3 ist daher falsch.

Der Umkehrsatz ist daher ein Beispiel eines Satzes, wofür stetige Differenzierbarkeit die "richtige" Voraussetzung ist.

- Im Satz 4.3 sind die Dimensionen des Definitionsbereichs und des Zielbereichs von  $f$  gleich. Der Satz über implizite Funktionen (Satz 4.11) wird beschreiben, was geschieht, falls das nicht der Fall ist.

**Beispiel 4.5.** [kubische Funktion] Wir betrachten die Abbildung

$$f : U_0 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \begin{pmatrix} 1 + x_1 + x_2^3 \\ x_1^3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist glatt, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gelten  $f(0) = (1, 0)$ ,

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

und darum

$$Df(0) = \text{id}. \tag{4.5}$$

Daher sind die Voraussetzungen des Satzes 4.3 mit  $U_0 := \mathbb{R}^2$ ,  $x_0 = 0$  und  $k = \infty$  erfüllt. Gemäss diesem Satz gibt es daher eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von 0, sodass  $f(U)$  offen ist und die Einschränkung  $f : U \rightarrow f(U)$  ein (glatter) Diffeomorphismus ist. Daher gibt es für jedes  $y \in f(U)$  ein eindeutiges  $x \in U$ , sodass  $f(x) = y$ . Wegen (4.5) und Bemerkung 4.2 ist die Ableitung der Umkehrung im Punkt  $y_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$D(f|_U^{-1})((1, 0)) = Df(f|_U^{-1}((1, 0)))^{-1} = \text{id}^{-1} = \text{id}.$$

(Die Inverse  $f|_U^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist wie in (4.3) definiert.)

**Bemerkung.** [Formel für Umkehrung] Möglicherweise gibt es im Beispiel 4.5 keine Formel für die Umkehrung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ . (Versuchen Sie, eine solche Formel zu finden!) Bemerkenswerterweise konnten wir trotzdem die Ableitung von  $f|_U^{-1}$  im Punkt  $(1, 0)$  berechnen.

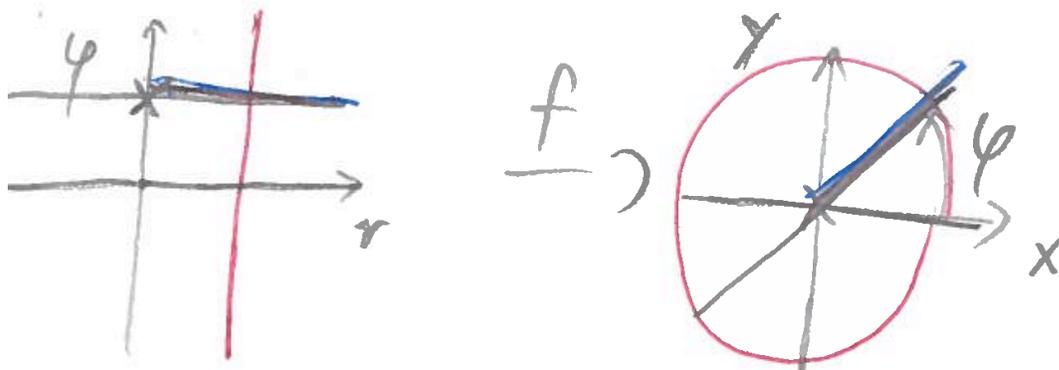


Abbildung 4.3: Polarkoordinaten.

In der Physik und anderen Anwendungen wollen wir manchmal die Koordinaten wechseln, um Rechnungen zu vereinfachen. Satz [4.3](#) rechtfertigt lokale Koordinatentransformationen, weil er uns erlaubt, physikalische Grössen in den neuen Koordinaten auszudrücken. Wenn zum Beispiel  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Temperatur ist, dann ist  $g \circ f|_U^{-1}$  die Temperatur in den mittels  $f$  transformierten Koordinaten.

**Beispiel 4.6.** [Polarkoordinaten] Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Das ist die Polarkoordinatentransformation. Siehe [Abbildung 4.3](#). Es gilt

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und darum

$$\det Df(r, \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \quad (4.6)$$

Sei  $(r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^2$ , sodass  $r_0 > 0$ . Dann gilt  $\det Df(r_0, \varphi_0) = r_0 \neq 0$ . Darum gibt es gemäss dem Umkehrsatz [4.3](#) eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(r_0, \varphi_0)$ , sodass  $f|_U$  offen ist und  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Diffeomorphismus ist. In der Tat, falls  $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , dann können wir

$$U := (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

wählen. Die Umkehrung von  $f|_U$  wird dann gegeben durch

$$(f|_U)^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}.$$

**Frage.** Was geschieht für andere Werte von  $\varphi_0$ ?

## 4.2 Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Abschnitt entspricht [Stra, Abschnitte 7.8].

Gewisse physikalische Gesetze können als eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0 \quad (4.7)$$

geschrieben werden, wobei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion ist,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  und die Koordinaten von  $x$  und  $y$  physikalische Größen sind. Dabei betrachten wir  $x = (x^1, \dots, x^n)$  als gegebene und  $y = (y^1, \dots, y^p)$  als gesuchte Größen.

**Beispiel 4.7.** Wir betrachten ein ideales Gas. Wir schreiben:

$p$ := Druck des Gases

$V$ := Volumen

$T$ := Temperatur

$n$ := Stoffmenge<sup>3</sup>

$R$ := universelle Gaskonstante  $\approx 8.3 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Wir schreiben

$$x := (V, T, n, R), \quad y := p.$$

Das ideale Gasgesetz lautet

$$f(V, T, n, R, p) := pV - nRT = 0.$$

In Anwendungen ist es wichtig zu wissen, wie die gesuchten Größen  $y$  von den gegebenen Größen  $x$  abhängen. Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass  $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  eine Lösung der Gleichung (4.7) ist.

**Frage 4.8.** Gibt es eine Lösung  $y$  von (4.7) für  $x$  nahe bei  $x_0$ ?

**Frage 4.9.** Ist diese Lösung eindeutig?

**Frage 4.10.** Wie hängt sie von  $x$  ab?

**Beispiel.** Im Beispiel (4.7) ist die Antwort auf die Fragen (4.8) und (4.9) "ja", falls  $f$  auf  $(0, \infty)^5$  definiert ist. Es gilt nämlich

$$p(V, T, n, R) = \frac{nRT}{V}.$$

<sup>3</sup>Die Stoffmenge wird in *Mol* gemessen. Ein Mol entspricht ungefähr  $6.0 \cdot 10^{23}$  Teilchen.

Die Antwort auf die Frage [4.10](#) ist "glatt". Der Satz über implizite Funktionen besagt, dass diese Aussagen unter bestimmten Bedingungen allgemein gelten, ausser, dass die Lösung nur *lokal* existiert und nur lokal eindeutig ist.

**Bemerkung.** Zur Frage [4.9](#) Wir haben  $p$  Unbekannte  $y^1, \dots, y^p$  und  $p$  Gleichungen:

$$f^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^p) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Darum ist es vernünftig zu erwarten, dass die Lösungen  $y$  isoliert auftreten, d. h., dass die Lösung eindeutig ist, falls wir das Gebiet von  $y$  auf eine kleine Umgebung von  $y_0$  einschränken. Falls die Abbildung

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

zum Beispiel linear ist, dann ist  $y = 0$  die einzige Lösung von [\(4.7\)](#).

Das Hauptresultat dieses Abschnitts gibt Antworten auf die Fragen [4.8](#) [4.9](#) [4.10](#). Seien  $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  eine offene Teilmenge,  $(x_0, y_0) \in W$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $f \in C^k(W, \mathbb{R}^p)$ . Wir schreiben

$$D_x f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

für die Ableitung der Abbildung

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

im Punkt  $x = x_0$ . Des Weiteren schreiben wir

$$D_y f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

für die Ableitung der Abbildung

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

im Punkt  $y = y_0$ .

**Satz 4.11** (implizite Funktionen). *Wir nehmen an, dass*

$$f(x_0, y_0) = 0, \tag{4.8}$$

$$D_y f(x_0, y_0) \text{ invertierbar ist.} \tag{4.9}$$

*Die folgenden Aussagen gelten:*

(i) *Es gibt offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$  und eine Abbildung*

$$g \in C^k(U, V),$$

sodass

$$U \times V \subseteq W, \quad (4.10)$$

$$f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \text{gr}(g) = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}, \quad (4.11)$$

$$D_y f(x, g(x)) \text{ invertierbar ist, } \forall x \in U \quad (4.12)$$

( $\text{gr}(g)$  = Graph von  $g$ ).

(ii) Seien  $U, V$  und  $g$  wie in (i) und  $x \in U$ . Dann gilt

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)). \quad (4.13)$$

Beweis: (i): [Stra] Satz 8.8.1, S. 237]

(ii): S. 136

**Beispiel 4.12.** [Satz über implizite Funktionen] Wir betrachten

$$\begin{aligned} n = p = 1, \\ f : W := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := y^2 - x + 1, \\ (x_0, y_0) \in (1, \infty) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

siehe Abbildung 4.4. In diesem Fall erfüllen

$$\begin{aligned} U &:= (1, \infty), \quad V := (0, \infty), \\ g : U &\rightarrow V, \quad g(x) := \sqrt{x-1}, \end{aligned}$$

die Bedingungen in Teil (i) des Satzes 4.11. (Siehe Abbildung 4.5.) Es gilt

$$D_x f(x, y) = -1, \quad D_y f(x, y) = 2y$$

und darum

$$-(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)) = -(2\sqrt{x-1})^{-1} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Die rechte Seite stimmt mit  $Dg(x) = g'(x)$  überein. Daher gilt dies Aussage (ii) des Satzes 4.11 in diesem Beispiel.

**Bemerkungen.** • In diesem Beispiel müssen wir  $U$  und  $V$  klein genug wählen: Die Funktion  $g$  kann nicht auf  $(-\infty, 1)$  definiert werden. Darum darf  $U$  das Intervall  $(-\infty, 1)$  nicht schneiden.  $V$  darf  $-y_0$  nicht enthalten, da sonst die Bedingung (4.11) ( $f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \text{gr}(g)$ ) nicht erfüllt ist.

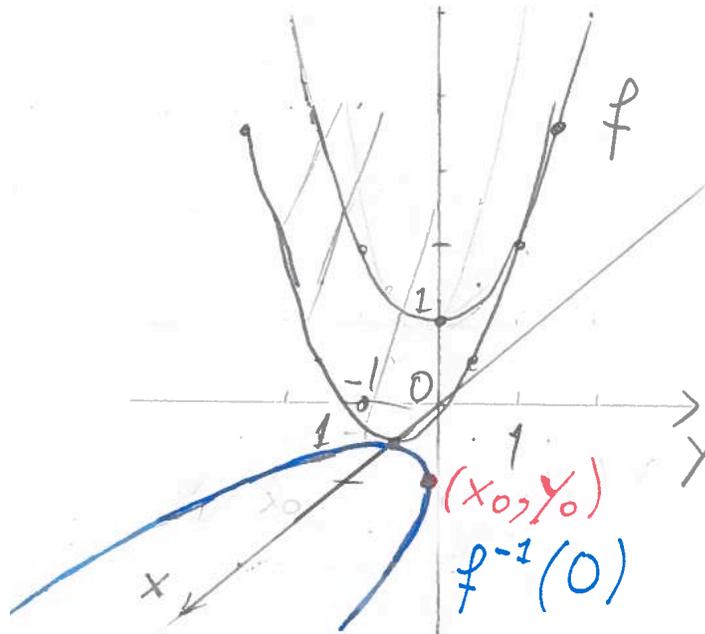


Abbildung 4.4:  $f(x, y) := y^2 - x + 1$ , Niveaumenge  $f^{-1}(0) = \text{Isolinie}$

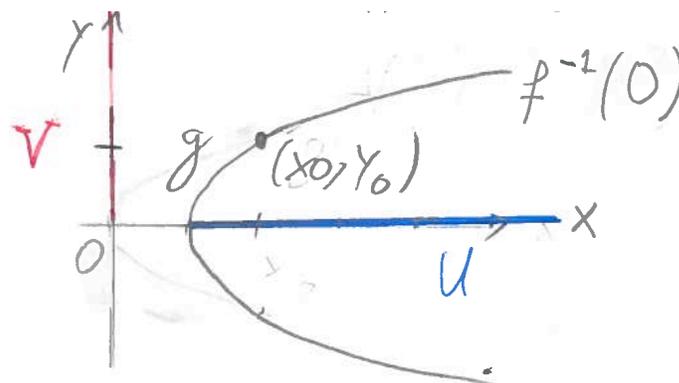


Abbildung 4.5: Der Satz über implizite Funktionen.



Abbildung 4.6: Höhenlinie auf einer Karte.

- Die Aussage von [4.11 \(i\)](#) ist falsch für  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , weil  $y$  in keiner Umgebung dieses Punktes als eine Funktion von  $x$  geschrieben werden kann:
  - Für  $x < 1$  gibt es keine Lösung  $y$  von  $f(x, y) = 0$ .
  - Für  $x > 1$  gibt es zwei Lösungen nahe  $y_0 = 0$ .

Das zeigt, dass wir die Voraussetzung [\(4.9\)](#) ( $D_y f(x_0, y_0)$  invertierbar) nicht weglassen können. (Für  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  ist diese Bedingung nicht erfüllt, da  $D_y f(1, 0) = 0$ , was nicht invertierbar ist.)

**Bemerkungen.** • Für jedes  $z \in \mathbb{R}$  ist die Niveaumenge  $f^{-1}(z)$  eine *Isolinie*. (*iso* kommt von griechisch  $\iota\sigma\sigma = \text{gleich}$ .) Diese Linien kommen in *topographischen Karten* vor. Dort beschreibt  $f$  die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel, siehe [Abbildung 4.6](#). Die Isolinien sind dann die Höhenlinien. Topographische Karten sind beim Wandern in den Bergen nützlich, da sie den vertikalen Abstand zwischen zwei Punkten angeben.

Satz [4.11](#) gibt Bedingungen an, unter denen eine Isolinie lokal der Graph einer  $C^k$ -Funktion  $g$  ist. (“Lokal” bedeutet “in einer kleinen Umgebung eines gegebenen Punktes”.) Das bedeutet, dass die Isolinie schön aussieht. (Sie ist dann eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , siehe später.)

- $g$  heisst die *implizite Funktion*. Sie ist implizit durch die Gleichung [\(4.7\)](#) definiert.
- Die Bedingungen [\(4.8\)](#), [4.11](#) implizieren, dass  $y_0 = g(x_0)$ . Wegen [\(4.13\)](#) folgt daraus, dass

$$Dg(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0).$$

Bemerkenswerterweise können wir mit dieser Formel die Ableitung von  $g$  im Punkt  $x_0$  explizit berechnen, falls wir  $f$  explizit kennen. (Wir brauchen dazu also keine Formel für  $g$ .) Falls  $n = p = 1$ , dann ist diese Ableitung die Rate, mit der sich die Grösse  $y$  ändert, wenn die Grösse  $x$  sich ändert.

- Satz [4.11](#) liefert Antworten auf die Fragen [4.8](#) (Gibt es eine Lösung?), [4.10](#) (Wie hängt sie von  $x$  ab?) und auf eine lokale Version der Frage [4.9](#) (Ist die Lösung eindeutig?).

- Wie in Beispiel [4.12](#) bemerkt, können wir die Voraussetzung [\(4.9\)](#), dass  $D_y f(x_0, y_0)$  invertierbar ist, nicht weglassen.

Merkhilfe für die Voraussetzung [\(4.9\)](#):  $D_y f(x_0, y_0)$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^p$  nach  $\mathbb{R}^p$ , daher ist es sinnvoll, Invertierbarkeit dieser Abbildung zu fordern. (Im Gegensatz dazu ist  $D_x f(x_0, y_0)$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^p$  und daher nie invertierbar, falls  $n \neq p$ .)

- Merkhilfe für die Formel [\(4.13\)](#) für  $Dg(x)$ :
  - Wir verwenden, was wir haben, nämlich die Inverse  $D_y f(x, g(x))^{-1}$ . Diese existiert wegen [\(i\)](#), [\(4.12\)](#).
  - Die rechte Seite von [\(4.13\)](#) ist die “einzige kurze” sinnvolle Formel, die  $D_y f(x, g(x))^{-1}$  enthält. (Diese Formel liefert tatsächlich eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^p$ .)

**Beweis von Teil [\(ii\)](#) des Satzes [4.11\(ii\)](#) (Formel für  $Dg(x)$ ):** Die Bedingung [\(4.11\)](#) impliziert, dass  $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in U$ , und daher

$$0 = f \circ (\text{id}, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^p. \tag{4.14}$$

Da  $g$   $C^k$  ist, ist die Abbildung

$$(\text{id}, g) : U \rightarrow U \times V$$

$C^k$  und daher differenzierbar. Die Gleichheit [\(4.14\)](#) und die Kettenregel (Satz [3.12](#)) implizieren daher, dass

$$0 = Df(x, g(x))(\text{id}_{\mathbb{R}^n}, Dg(x)) = D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))Dg(x), \quad \forall x \in U.$$

Daraus folgt die Gleichheit [\(4.13\)](#). Das beweist Teil [\(ii\)](#) des Satzes [4.11](#)  $\square$

## Beispiel für den Satz über implizite Funktionen: einfache Nullstellen von Polynomen

**Beispiel 4.13.** [einfache Nullstellen von Polynomen] Einfache Nullstellen von Polynomen hängen glatt von den Koeffizienten ab: Seien

$$f : W := \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \sum_{i=0}^n x_i y^i \quad (i\text{-te Potenz})$$

und  $(X, Y) \in W$ , sodass  $f(X, Y) = 0$ . ( $(X, Y)$  spielt die Rolle von  $(x_0, y_0)$ .) Wir definieren

$$p_0(y) := f(X, y).$$

**Behauptung 1.**  $D_y f(X, Y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $Y$  eine einfache Nullstelle von  $p_0$  ist.

Diese Bedingung bedeutet das Folgende: Falls  $q_0$  ein Polynom ist, sodass  $p_0(y) = (y - Y)q_0(y)$ , dann gilt  $q_0(Y) \neq 0$ .

**Beweis der Behauptung 1:** Sei  $q_0$  ein Polynom, sodass  $p_0(y) = (y - Y)q_0(y)$ . Gemäss der Leibnizregel (=Produktregel) gilt

$$p'_0(y) = q_0(y) + (y - Y)q'_0(y)$$

und darum, dass  $p'_0(Y) = q_0(Y)$ . Darum ist  $Y$  genau dann eine einfache Nullstelle von  $p_0$ , falls  $p'_0(Y) \neq 0$ . Andererseits ist  $D_y f(X, Y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Multiplikation mit  $p'_0(Y)$ . Diese Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn

$$p'_0(Y) \neq 0, \tag{4.15}$$

d. h. g. d. w.  $Y$  ein einfacher Nullpunkt von  $p_0$  ist. Das beweist Behauptung 1.  $\square$

Wir nehmen jetzt an, dass  $Y$  eine einfache Nullstelle von  $p_0$  ist. Wegen Satz 4.11 gibt es dann offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  von  $X$  und  $V \subseteq \mathbb{R}$  von  $Y$  und eine Funktion  $g \in C^\infty(U, V)$ , sodass für jedes  $x \in U$  die Zahl  $y = g(x)$  die Gleichung

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y^i = 0,$$

löst und das die einzige Lösung in  $V$  ist. (Wir können für  $V$  ein Intervall wählen.) Abbildung 4.7 verdeutlicht das.

In den Fällen  $n = 1$  und  $n = 2$  wussten wir das schon:

**Fall  $n = 1$ :** (4.15) ist dann äquivalent zu

$$p'_0(Y) = X_1 \neq 0.$$

In diesem Fall gibt es tatsächlich eine implizite Funktion: Wir können dafür nämlich das Folgende nehmen:

$$U := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad V := \mathbb{R}, \quad g(x) := -\frac{x_0}{x_1}.$$

**Fall  $n = 2$ :** (4.15) ist dann äquivalent zu

$$p'_0(Y) = X_1 + 2X_2Y \neq 0. \tag{4.16}$$

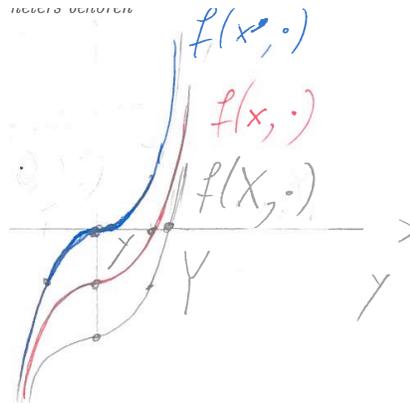


Abbildung 4.7: Polynome, die zu verschiedenen Parametern gehören. Für  $x$  nahe  $X$  hängt die Lösung  $y$  von  $f(x, y) = 0$  glatt von  $x$  ab. Für  $x = x'$  gilt das nicht mehr.

In diesem Fall gibt es tatsächlich ebenfalls eine implizite Funktion:

**Fall**  $X_2 \neq 0$ . Dann gilt

$$y = g(x) := \frac{-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4x_0x_2}}{2x_2}. \quad (4.17)$$

Das ist die Mitternachtsformel<sup>4</sup> Das richtige Vorzeichen in (4.17) hängt von  $Y$  ab. Die Bedingung (4.16) garantiert, dass

$$X_1^2 - 4X_0X_2 \neq 0.$$

(Sonst haben wir

$$Y = g(X) = -\frac{X_1}{2X_2}.)$$

Daraus folgt, dass  $g$  (gegeben durch (4.17)) im Punkt  $x = X$  glatt ist.

**Frage.** *Wie steht es mit dem Fall  $X_2 = 0$ ?*

**Frage.** *Passen die Formeln für die Fälle  $X_2 \neq 0$  und  $X_2 = 0$  glatt zusammen?*

**Frage.** *Wie steht es mit mehrfachen Nullstellen von Polynomen? Hängen diese ebenfalls glatt von den Koeffizienten ab?*

(Versuchen Sie, selber Antworten auf diese Fragen zu finden!)

△

<sup>4</sup>Damit meinen wir die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung.

**Bemerkung.** Wie wir in Beispiel [4.13](#) gesehen haben, hängen einfache Nullstellen von Polynomen glatt von den Koeffizienten ab. Im Gegensatz dazu besagt der Satz von Abel-Ruffini, dass es für  $n \geq 5$  keine Formel für die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms vom Grad  $n$  gibt. Damit meinen wir einen endlichen Ausdruck, der aus den Koeffizienten des Polynoms mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzeln ziehen gebildet wird. (Dieser Satz ist nach Paolo Ruffini (1765 - 1822, italienischer Mathematiker und Arzt) und Niels-Henrik Abel (1802 - 1829, norwegischer Mathematiker) benannt.)

Das zeigt, dass der Satz über implizite Funktionen ein starkes Werkzeug ist: Obwohl es dafür keine Formel gibt, wissen wir, dass es eine glatte implizite Funktion gibt. Wir können sogar ihre Ableitung in bestimmten Punkten berechnen.

## Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums, Immersionen, Einbettungen und Submersionen

Intuitiv ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  eine “schöne” Teilmenge wie zum Beispiel eine Kurve oder eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$ . “Schönheit” bedeutet, dass die Teilmenge lokal wie  $\mathbb{R}^d$  aussieht, wobei für eine Kurve  $d = 1$  und für eine Fläche  $d = 2$  ist. Untermannigfaltigkeiten kommen in den Sätzen von Green, Stokes und Gauß vor, die wir später behandeln werden. Diese Sätze spielen eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik.

Wir werden auch Immersionen und Submersionen behandeln. Eine Immersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung in jedem Punkt injektiv ist. Eine Submersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist.

Ein Punkt  $y$  heisst *regulärer Wert* einer  $C^k$ -Abbildung  $f$ , falls für jeden Punkt  $x$  im Urbild von  $y$  unter  $f$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x$  surjektiv ist. Der Satz vom regulären Wert besagt, dass das Urbild jedes regulären Wertes eine Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums ist. Dieser Satz liefert viele Beispiele von Untermannigfaltigkeiten.

### 4.3 Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums

Seien  $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $d \in \{0, \dots, n\}$ .

**Definition 4.14** (Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums). *Sei  $x_0 \in M$ . Wir sagen, dass  $M$  um  $x_0$  eine  $d$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist g. d. w. es*

eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$ , eine Permutation  $\sigma$  von  $\{1, \dots, n\}$ , eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine Funktion  $f \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-d})$  gibt, sodass

$$\{(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) \mid x \in M \cap U\} = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) \mid y \in V\}. \quad (4.18)$$

Wir nennen  $M$  eine  $d$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  g. d. w.  $M$  diese Bedingung für jeden  $x_0 \in M$  erfüllt. Im Fall  $k = \infty$  nennen wir eine solche Teilmenge  $M$  eine glatte ( $d$ -dimensionale) Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

Abbildung [4.8](#) verdeutlicht diese Definition.

**Bemerkungen.** [Untermannigfaltigkeit]

- Eine Permutation einer Menge  $X$  ist eine Bijektion  $\sigma : X \rightarrow X$ . Ein Beispiel dafür ist die Identität  $\text{id}_X$ . Ein anderes Beispiel ist die Abbildung

$$\sigma : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}, \quad \sigma(1) := 2, \sigma(2) := 1.$$

Diese Abbildung permutiert, d. h. vertauscht die beiden Indizes 1 und 2.

- Im Fall  $\sigma = \text{id}_{\{1, \dots, n\}}$  sagt die Bedingung [\(4.18\)](#), dass der Durchschnitt  $M \cap U$  der Graph der Funktion  $f$  ist.
- Für eine allgemeine Permutation  $\sigma$  von  $\{1, \dots, n\}$  ist die linke Seite von [\(4.18\)](#) das Bild von  $M \cap U$  unter der Standardkoordinatentransformation

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.19)$$

Diese Koordinatentransformation entspricht einer Vertauschung der Variablen  $x^1, \dots, x^n$ . Die Bedingung in Definition [4.14](#) ist also, dass  $M$  lokal bis auf eine Standardkoordinatentransformation als der Graph einer  $C^k$ -Funktion geschrieben werden kann.

**Proposition 4.15** (Dimension wohldefiniert). *Falls  $M$  um  $x_0 \in M$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit der Dimensionen  $d$  und  $d'$  ist, dann gilt  $d = d'$ .*

**Beweis:** Wir schreiben  $\text{pr}' : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d'}$  für die Projektion auf den ersten Faktor [5](#). Wir wählen  $U, \sigma, V, f$  wie in Definition [4.14](#). Wir schreiben  $x_0 =: (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d'}$ . Im Fall  $\sigma = \text{id}$  ist die Abbildung  $\text{pr}' \circ (\text{id}, f) : V \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  im Punkt  $y_0$  eine Immersion. Daraus folgt, dass  $d' \geq d$ . Den Fall  $\sigma \neq \text{id}$  behandeln wir analog, indem wir die Koordinaten geeignet transformieren.

<sup>5</sup>Diese Projektion ist definiert durch  $\text{pr}'(y', z') := y'$ , für  $x = (y', z') \in \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{n-d'}$ .

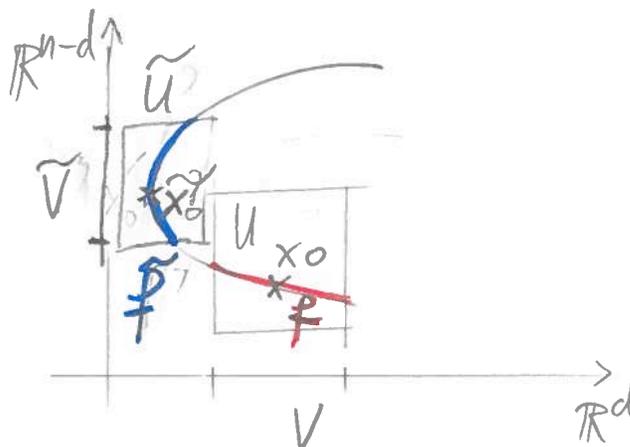


Abbildung 4.8: 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . ( $n = 2$ ,  $d = 1$ ) Um den Punkt  $x_0$  kann die Koordinate  $x^2$  als eine Funktion von  $x^1$  aufgefasst werden. Um den Punkt  $\tilde{x}_0$  ist es umgekehrt.

Ein analoges Argument zeigt, dass  $d \geq d'$ , also  $d = d'$ . Das beweist Proposition [4.15](#)  $\square$

**Beispiel 4.16.** Jeder  $d$ -dimensionale (lineare) Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $d$ .

**Beispiel 4.17.** Jede offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n$ .

**Beispiel 4.18.** Wir betrachten die Helix (=Schraubenlinie)

$$\{(y, \cos y, \sin y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

siehe Abbildung [4.9](#). Das ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  der Dimension 1. (Warum?)

**Beispiel 4.19.** Die Sphäre

$$S^{n-1} := S_1^{n-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$ . Um das einzusehen, betrachten wir zuerst einen Punkt  $x_0 \in S^{n-1} \cap \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ . Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty), \quad V := B^{n-1}, \quad \sigma := \text{id},$$

$$f : V \rightarrow (0, \infty), \quad f(y) := \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}. \quad (4.20)$$

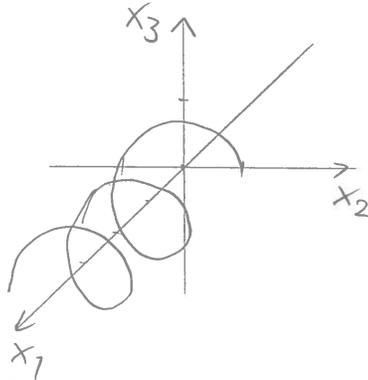


Abbildung 4.9: Helix = Schraubenlinie.

Abbildung 4.10: Dieser “Ballon” mit einer Spitze ist keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

Diese Abbildung ist glatt. Des Weiteren ist  $U$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und

$$\{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid x \in M \cap U\} = S^{n-1} \cap U = \text{gr}(f).$$

$S^{n-1}$  ist daher um den Punkt  $x_0$  eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$ . Dasselbe gilt für einen allgemeinen Punkt  $x_0 \in S^{n-1}$ . Um das zu sehen, betrachten wir wieder die Funktion  $f$  wie in (4.20) und verwenden ein geeignetes  $U$  und eine geeignete Permutation  $\sigma$  der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Im Fall  $n = 2$  und  $x_0 = (1, 0)$  können wir zum Beispiel  $U := (0, \infty) \times \mathbb{R}$  und die Permutation  $\sigma(1) := 2$ ,  $\sigma(2) := 1$  verwenden. (Überprüfen Sie das!) Daraus folgt, dass die Sphäre  $S^{n-1}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  ist, wie behauptet.

**Beispiele 4.20.** [keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit]

- Die Menge

$$(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$$

ist keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . (Warum?)

- Ein “Ballon” mit einer Spitze wie in Abbildung 4.10 ist keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . (Warum?)

## 4.4 Immersionen, Einbettungen, Submersionen, Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten

Eine Immersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung injektiv ist. Eine Submersion ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung surjektiv ist.

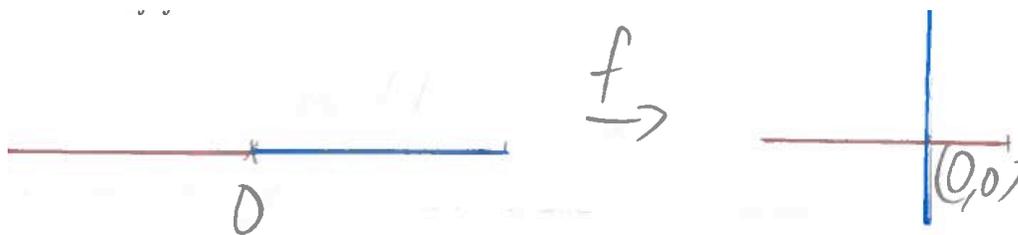


Abbildung 4.11: Eine Immersion, die keine Einbettung ist.

Seien  $n, p \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**Definition 4.21** (Immersion, Submersion). Sei  $x \in U$  ein Punkt, in dem  $f$  differenzierbar ist. Wir sagen, dass  $f$  im Punkt  $x$  eine Immersion ist g. d. w.  $Df(x)$  injektiv ist. Wir sagen, dass  $f$  im Punkt  $x$  eine Submersion ist g. d. w.  $Df(x)$  surjektiv ist. Wir sagen, dass  $f$  eine Immersion/ Submersion ist g. d. w.  $f$  in jedem Punkt eine Immersion/ Submersion ist. Wir nennen  $f$  eine  $C^k$ -Einbettung g. d. w.  $f$  injektiv,  $C^k$  und eine Immersion ist und  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  stetig ist.

**Beispiel 4.22.** [Immersion, Submersion] Sei  $f = T : U := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine lineare Abbildung. Falls  $T$  injektiv ist, dann ist sie eine glatte Einbettung. Falls sie surjektiv ist, dann ist sie eine glatte Submersion.

**Beispiel 4.23.** [Immersion, die keine Einbettung ist] Wir betrachten die Abbildung

$$f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(y) := \begin{cases} (y + 1, 0), & \text{falls } y < 0, \\ (0, y - 1), & \text{falls } y > 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung 4.11. Diese Abbildung ist eine glatte Immersion, aber keine  $C^k$ -Einbettung (für jedes  $k \geq 1$ ), weil sie nicht injektiv ist. Wir schreiben  $V := (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .  $f|_V$  ist eine injektive glatte Immersion, aber keine  $C^k$ -Einbettung (für jedes  $k \geq 1$ ), da  $f|_V^{-1} : f(V) \rightarrow V$  im Punkt  $(0, 0)$  nicht stetig ist. (Überlegen Sie sich das!) Auf der anderen Seite ist die Einschränkung von  $f$  auf  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$  eine glatte Einbettung.

**Bemerkung.** Im obigen Beispiel konnten wir für einen gegebenen Punkt im Definitionsbereich der Immersion  $f$  eine Umgebung finden, auf der  $f$  eine Einbettung ist. Das Bild dieser Einbettung ist eine glatte Untermannigfaltigkeit. Diese zwei Aussagen gelten allgemein.

Seien  $d, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Satz 4.24** ("Einbettungssatz"). Falls  $\psi$  eine  $C^k$ -Einbettung ist, dann ist ihr Bild  $\psi(V)$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $d$ .

Beweis: [DK04a, Corollary 4.3.2, p. 116]

**Bemerkung.** Das bedeutet, dass  $C^k$ -Einbettungen “schöne” Abbildungen sind.

**Beispiel 4.25.** [injektive lineare Abbildung] Sei  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear und injektiv. Dann ist  $\psi$  eine glatte Einbettung. Gemäss Satz 4.24 ist ihr Bild  $\psi(\mathbb{R}^d)$  daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $d$ . Wie Sie im Fach *Lineare Algebra* gelernt haben, ist dieses Bild sogar<sup>6</sup> ein  $d$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Siehe Bemerkung 4.4(iii) unten.

**Bemerkungen.** [Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz] Wiederholung aus der linearen Algebra: Seien  $V, W$  Vektorräume und  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

(i) Der *Kern* (oder *Nullraum*) von  $T$  ist die Menge

$$\ker T := T^{-1}(0) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

(ii) Das Bild von  $T$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .

(iii) Der *Dimensionssatz für lineare Abbildungen* (oder *Rangatz*) besagt, dass

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V).$$

Falls  $T$  injektiv ist, dann ist sein Kern gleich  $\{0\}$  und daher also

$$\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V).$$

Falls  $T$  surjektiv ist, dann ist sein Bild gleich  $W$  und daher also

$$\dim(\ker(T)) = \dim(V) - \dim(W).$$

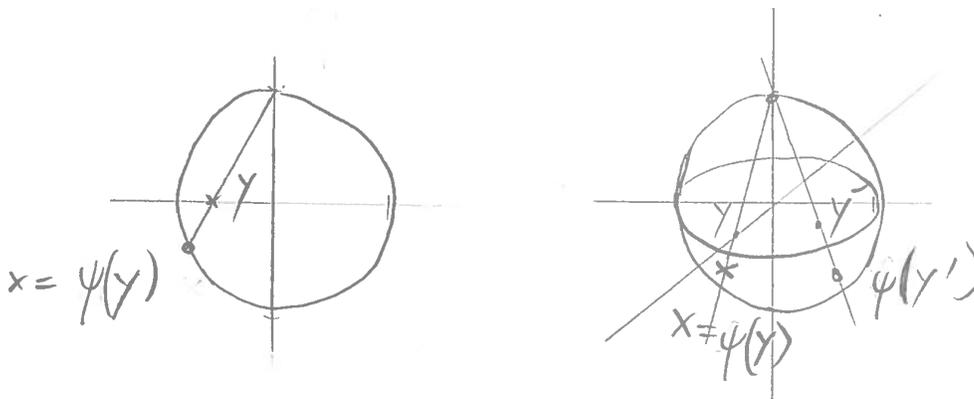
Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $d \in \{0, \dots, n\}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in M$ .

**Satz 4.26** (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit). *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) (*Untermannigfaltigkeit*) Um  $x_0$  ist  $M$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$ .

---

<sup>6</sup>Hier steht *sogar*, da jeder  $d$ -dimensionale Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  eine glatte  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Siehe Beispiel 4.16

Abbildung 4.12:  $\psi =$  inverse stereographische Projektion.

(ii) (lokale Parametrisierung) Es gibt eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und eine  $C^k$ -Einbettung  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass

$$M \cap U = \psi(V).$$

(iii) (lokale Submersion) Es gibt eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und eine  $C^k$ -Submersion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ , sodass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0)). \quad (4.21)$$

Beweis: [DK04a, Theorem 4.7.1, p. 126]

**Bemerkung.** Eine Abbildung  $\psi$  wie in (ii) heiss *lokale Parametrisierung* von  $M$ .  $\psi$  parametrisiert  $M \cap U$ , was eine Umgebung des Punktes  $x_0$  in  $M$  ist. Das Wort *lokal* deutet an, dass diese Umgebung klein sein kann.

**Beispiel 4.27.** [Sphäre ist Untermannigfaltigkeit, lokale Parametrisierung] Wir wenden die Implikation (ii)  $\implies$  (i) des Satzes 4.26 an, um zu zeigen, dass die Sphäre  $M := S^{n-1}$  eine glatte  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Sei  $x_0 \in S^{n-1}$ . Wir überprüfen die Bedingung (ii) mit  $d := n-1$ . Wir nennen den Punkt  $(0, \dots, 0, 1)$  den *Nordpol der Sphäre*  $S^{n-1}$ .

**Fall:**  $x_0 \neq$  Nordpol. Wir definieren

$$V := \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{n-1}, \quad U := \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \quad \text{und} \quad \psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

als die inverse stereographische Projektion durch den Nordpol. Diese Abbildung ist durch die Konstruktion in Abbildung 4.12 gegeben. Gemäss Übungsserie 9 ist diese Abbildung eine glatte Einbettung. Sie ist also eine glatte lokale Parametrisierung der Sphäre. Ihr Bild ist die Sphäre ohne den Nordpol, also

$$\text{im}(\psi) = \psi(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} = S^{n-1} \cap U.$$

Daher ist die Bedingung (ii) erfüllt. Im Fall, dass  $x_0$  der Nordpol ist, folgt das aus einem analogen Argument, in dem wir stereographische Projektion durch den Südpol  $(0, \dots, 0, -1)$  verwenden.

Gemäss Satz 4.26 ist daher die Bedingung (i) mit  $d = n - 1$  erfüllt, d. h., um  $x_0$  ist  $S^{n-1}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ . Da das für jeden Punkt  $x_0 \in S^{n-1}$  gilt, ist  $S^{n-1}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ . Das hatten wir schon in Beispiel 4.19 gesehen.

**Beispiel 4.28.** [Sphäre ist Untermannigfaltigkeit, lokale Submersion] Wir wenden die Implikation (iii)  $\implies$  (i) des Satzes 4.26 an, um zu zeigen, dass die Sphäre  $M := S^{n-1}$  eine glatte  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Sei  $x_0 \in S^{n-1}$ . Wir überprüfen die Bedingung (iii) mit  $d := n - 1$ . Dazu definieren wir

$$U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g(x_0) = 1, \quad \text{also} \quad S^{n-1} = g^{-1}(1) = g^{-1}(g(x_0)).$$

Daher ist die Bedingung (4.21) erfüllt. Die Abbildung  $g$  ist glatt. Sei  $x \in U$ . Gemäss Beispiel 3.16 ist die Ableitung von  $g$  in  $x$  gegeben durch

$$Dg(x) = 2\langle x, \cdot \rangle = 2(x_1 \ \cdots \ x_n) \cdot : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung ist nicht konstant gleich 0. Da sie linear ist und als Zielraum  $\mathbb{R}$  hat, ist sie daher surjektiv. Daher ist  $g$  im Punkt  $x$  eine Submersion. Da dies für jeden Punkt  $x \in U$  gilt, ist  $g$  eine Submersion. Also erfüllt  $g$  alle Bedingungen von (iii). Daher ist diese Bedingung mit  $d = n - 1$  erfüllt. Gemäss Satz 4.26 ist daher die Bedingung (i) mit  $d = n - 1$  erfüllt, d. h., um  $x_0$  ist  $S^{n-1}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ .

## 4.5 Satz vom regulären Wert

Ein regulärer Wert einer differenzierbaren Funktion  $g$  ist eine Punkt  $z$  im Zielbereich von  $g$ , sodass die Ableitung  $Dg(x)$  surjektiv ist für jeden Punkt  $x$  im Urbild  $g^{-1}(z)$ . Der Satz vom regulären Wert besagt, dass das Urbild eines regulären Wertes einer  $C^k$ -Funktion eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit ist. Das ist ein wichtiges Werkzeug, um Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

In diesem Abschnitt charakterisieren wir auch Untermannigfaltigkeiten mittels lokaler Submersionen.

Seien  $n, p \in \mathbb{N}_0$ ,  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $g \in C^k(U_0, \mathbb{R}^p)$  und  $z_0 \in \mathbb{R}^p$ .

**Definition 4.29.** Wir nennen  $z_0$  einen regulären Wert für  $g$  g. d. w.  $g$  eine Submersion ist in jedem Punkt von

$$g^{-1}(z_0) = \{x \in U_0 \mid g(x) = z_0\}.$$

Sonst nennen wir  $z_0$  einen singulären Wert für  $g$ .

**Satz 4.30** (Satz vom regulären Wert). Das Urbild jedes regulären Wertes für  $g$  ist eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - p$ .

Beweis: Das folgt aus der Implikation (i)  $\iff$  (iii) in Satz 4.26

**Bemerkungen.** • Dieser Satz liefert eine Bedingung, unter der die Lösungsmenge der Gleichung  $g(x) = z$  “schön” ist.

- Dass die Dimension von  $g^{-1}(z_0)$  gleich  $n - p$  ist, ist plausibel, weil wir  $n$  Unbekannte  $x^1, \dots, x^n$  und  $p$  Bedingungen  $g^i(x) = z_0^i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , haben. Jede Bedingung vermindert die Dimension um 1.

**Beispiel 4.31.** [Satz vom regulären Wert, surjektive lineare Abbildung] Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine surjektive lineare Abbildung. Dann ist  $g$  eine glatte Submersion. Jeder Punkt in  $\mathbb{R}^p$  ist daher ein regulärer Wert für  $g$ . Gemäss Satz 4.30 ist  $g^{-1}(0)$  daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - p$ . Wie Sie im Fach *Lineare Algebra* gelernt haben, ist  $g^{-1}(0)$  sogar<sup>7</sup> ein  $(n - p)$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Siehe Bemerkung 4.4(iii).

**Beispiel 4.32.** [Sphäre als Niveaumenge, Satz vom regulären Wert] Wir wenden Satz 4.30 an, um zu zeigen, dass die Sphäre  $S^{n-1}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  ist. Dazu definieren wir  $p := 1$  und betrachten wir die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(1) = S^{n-1}.$$

Die Abbildung  $g$  ist glatt und 1 ist ein regulärer Wert für  $g$ , weil

$$Dg(x) = 2\langle x, \cdot \rangle = 2(x_1 \ \dots \ x_n) \cdot : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

surjektiv ist für jeden Punkt  $x \in S^{n-1}$ . Gemäss Satz 4.30 ist  $S^{n-1}$  daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - p = n - 1$ . Das hatten wir schon in den Beispielen 4.19, 4.27 und 4.28 gesehen. (Beispiel 4.28 ist ähnlich zum jetzigen Beispiel.)

Im Gegensatz dazu ist das Urbild  $g^{-1}(0) = \{0\}$  keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$ <sup>8</sup>. Das steht nicht im Widerspruch zu Satz 4.30, da 0 ein singulärer

<sup>7</sup>Hier steht *sogar*, da jeder  $d$ -dimensionale Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  eine glatte  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Siehe Beispiel 4.16

<sup>8</sup>Es ist jedoch eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 0.

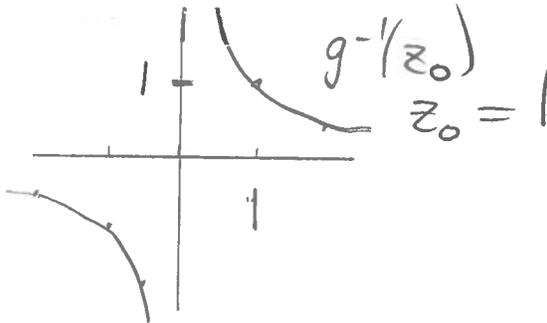


Abbildung 4.13: Doppelhyperbel.

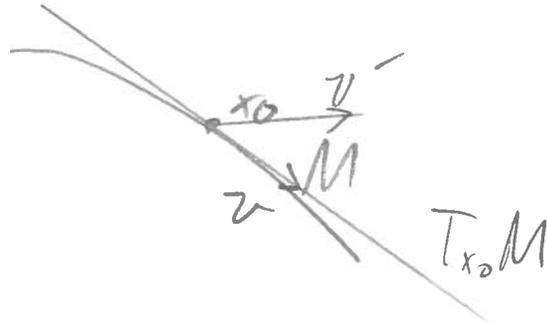


Abbildung 4.14:  $v$  ist ein Tangentialvektor an  $M$  im Punkt  $x_0$ ,  $v'$  nicht.

Wert für  $g$  ist.

**Beispiel 4.33.** [Hyperbel und singulärer Wert] Wir betrachten die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x_1 x_2.$$

Sei  $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $g^{-1}(z_0) \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Doppelhyperbel. Siehe Abbildung 4.13. Es gilt

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Für jeden Punkt  $x \in g^{-1}(z_0)$  ist diese Abbildung ungleich 0 und daher surjektiv. (Wir verwenden hier, dass die Abbildung linear ist und der Zielraum  $\mathbb{R}$  ist.) Daher ist  $z_0$  ein regulärer Wert. Gemäss Satz 4.30 ist  $g^{-1}(z_0)$  daher eine glatte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  der Dimension 1. Im Gegensatz dazu ist  $g^{-1}(0)$  im Punkt 0 keine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . Das steht nicht im Widerspruch mit Satz 4.30, da  $z_0 = 0$  ein singulärer Wert für  $g$  ist.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes vom regulären Wert ist die folgende Aussage:

Falls  $g^{-1}(z_0)$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - p$  ist, dann ist  $z_0$  ein regulärer Wert für  $g$ .

**Frage.** Gilt diese Umkehrung?

Versuchen Sie, diese Frage zu beantworten!

## 4.6 Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit

Wir betrachten eine Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , einen Punkt  $x_0 \in M$  und einen Vektor  $v$  mit Anfangspunkt  $x_0$ .  $v$  ist ein *Tangentialvektor* an  $M$  im Punkt  $x_0$  g. d. w. die

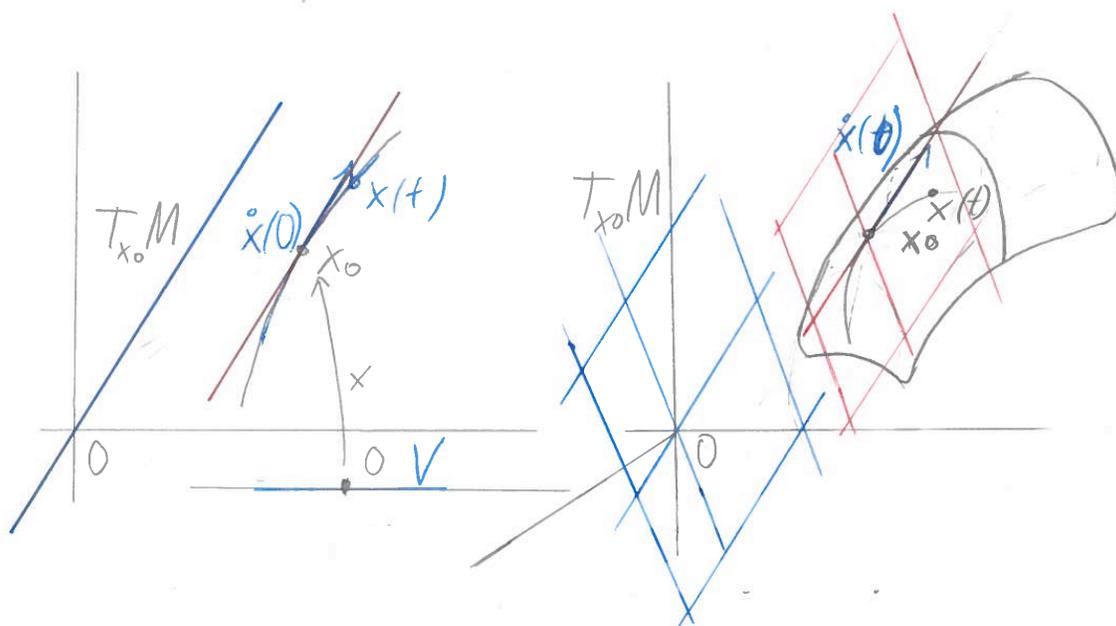


Abbildung 4.15: Der Tangentialraum  $T_{x_0}M$  an eine Kurve und an eine Fläche.

Gerade durch  $v$  die Untermannigfaltigkeit  $M$  im Punkt  $x_0$  berührt, siehe Abbildung 4.14. Die Menge aller Tangentialvektoren ist ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Sie heisst der *Tangentialraum* an  $M$  im Punkt  $x_0$  und wird als  $T_{x_0}M$  geschrieben. Siehe Abbildung 4.15. Der Tangentialraum verallgemeinert die *Tangente* an den Graphen einer Funktion einer reellen Variable.

Die *Tangentialabbildung* einer  $C^1$ -Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  in einem Punkt  $x_0 \in M$  ist eine lineare Abbildung von  $T_{x_0}M$  nach  $T_{f(x_0)}N$ . Sie verallgemeinert die Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen. Ein kritischer Punkt einer  $C^1$ -Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Punkt in  $M$ , in dem die Tangentialabbildung von  $f$  verschwindet. Jeder kritische Punkt ist ein Kandidat für eine Maximal- oder Minimalstelle von  $f$ . Die Lagrange-Multiplikatorenregel ist ein Werkzeug, um kritische Punkte einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit zu finden.

Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ .

**Definition 4.34** (Tangentialraum). Wir definieren  $T_{x_0}M$ , den Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $x_0$  als die Menge

$$T_{x_0}M := \left\{ \dot{x}(0) \mid W \subseteq \mathbb{R} \text{ offen, } x : W \rightarrow \mathbb{R}^n : \right. \\ \left. 0 \in W, x(0) = x_0, x(t) \in M, \forall t \in W, x \text{ differenzierbar in } 0 \right\}. \quad (4.22)$$

Wir nennen die Elemente von  $T_{x_0}M$  Tangentialvektoren an  $M$  im Punkt  $x_0$ .

**Beispiel 4.35.** [Tangentialräume an lineare Unterräume] Sei  $M$  ein  $d$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in M$ . Dann gilt

$$T_{x_0}M = M.$$

**Beispiel 4.36.** [Tangentialräume an eine offene Teilmenge] Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in M$ . Dann gilt

$$T_{x_0}M = \mathbb{R}^n.$$

Das folgende Resultat liefert nützliche Formeln für den Tangentialraum. Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $d \in \{0, \dots, n\}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  und  $x_0 \in M$ . Wir können  $T_{x_0}M$  wie folgt charakterisieren.

**Satz 4.37** (Charakterisierung des Tangentialraumes). (i) Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$  so, dass

$$M \cap U = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) \mid y \in V\}.$$

Wir bezeichnen die erste Komponente von  $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$  mit  $y_0$ . Es gilt

$$T_{x_0}M = \text{gr}(Df(y_0)). \quad (4.23)$$

(ii) Seien  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $y_0 \in V$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  so, dass

$$\psi(y_0) = x_0, \quad \psi(V) = M \cap U$$

und  $\psi$  im Punkt  $y_0$  eine Immersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \text{im}(D\psi(y_0)). \quad (4.24)$$

(iii) Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{p=n-d}$  so, dass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0))$$

und  $g$  im Punkt  $x_0$  eine Submersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \ker(Dg(x_0)) = Dg(x_0)^{-1}(0). \quad (4.25)$$

Beweis: [\[DK04a\]](#), Theorem 5.1.2, p. 134]

**Bemerkungen.** [Charakterisierung des Tangentialraumes]

- Aufgrund der Definition [4.14](#) (Untermannigfaltigkeit) besitzt  $M$  bis auf eine Standard-Koordinatentransformation eine lokale Darstellung mittels  $f$  wie in Satz [4.37\(i\)](#). Aufgrund des Satzes [4.26](#) (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit) besitzt  $M$  eine lokale Darstellung mittels  $\psi$  und  $g$  wie in Satz [4.37\(ii-iii\)](#). Wir können daher die Gleichheiten [\(4.24-4.25-4.23\)](#) verwenden, um  $T_{x_0}M$  zu berechnen.
- Die drei Beschreibungen des Tangentialraumes in Satz [4.37](#) sind parallel zu den Beschreibungen der Eigenschaft, dass  $M$  eine Untermannigfaltigkeit ist: In [\(i\)](#) wird  $M$  lokal als *Graph* einer Funktion und  $T_{x_0}M$  als der *Graph* der Ableitung der Funktion (im Punkt  $y_0$ ) geschrieben. In [\(ii\)](#) wird  $M$  lokal als das *Bild* einer Immersion<sup>9</sup> und  $T_{x_0}M$  als das *Bild* der Ableitung der Immersion geschrieben. In [\(iii\)](#) wird  $M$  lokal als das *Urbild* eines Punktes einer Submersion<sup>10</sup> und  $T_{x_0}M$  als das *Urbild* von 0 unter der Ableitung der Submersion geschrieben.

**Korollar 4.38** (Dimension des Tangentialraumes).  $T_{x_0}M$  ist ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension gleich der Dimension von  $M$ .

**Beweis des Korollars [4.38](#):** Gemäss Satz [4.26\(i\)⇒\(ii\)](#) (Charakterisierung einer Untermannigfaltigkeit) gibt es  $(V, U, \psi)$  wie in Satz [4.37\(ii\)](#). Gemäss diesem Satz gilt [\(4.24\)](#). Da  $D\psi(y_0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist, folgt daraus, dass  $\dim T_{x_0}M = \dim \mathbb{R}^d = d$ . Das beweist Korollar [4.38](#).  $\square$

**Bemerkung.** Alternativ folgt Korollar [4.38](#) aus Satz [4.26\(iii\)⇒\(i\)](#) und Satz [4.37\(iii\)](#). (Überprüfen Sie das!)

**Beispiel 4.39.** [Tangentialraum und Tangente] Sei  $V \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge und  $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ . Der Graph  $M := \text{gr}(f)$  ist eine eindimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $x_0 \in M$ . Wir schreiben  $y_0$  für die erste Komponente von  $x_0$ . Gemäss Satz [4.37\(i\)](#) ist der Tangentialraum an  $\text{gr}(f)$  im Punkt  $x_0$  gegeben durch

$$T_{x_0} \text{gr}(f) = \text{gr}(Df(y_0)) = \{(t, Df(y_0)t) = t(1, f'(y_0)) \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (4.26)$$

Das ist die *Tangente*<sup>11</sup> an den Graphen der Funktion  $f$ , so verschoben, dass sie durch den Ursprung in  $\mathbb{R}^2$  geht. Machen Sie sich das klar! Verwenden Sie, dass die Ableitung der Funktion im Punkt  $y_0$  die Steigung der Tangente ist! (So kann man die Ableitung intuitiv erklären.)

<sup>9</sup>Es reicht, dass die Abbildung im Punkt  $y_0$  eine Immersion ist.

<sup>10</sup>Es reicht, dass die Abbildung im Punkt  $x_0$  eine Submersion ist.

<sup>11</sup>die Sie in der Mittelschule gesehen haben

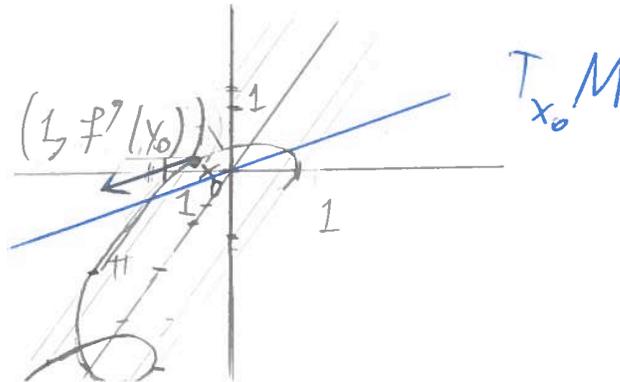


Abbildung 4.16: Tangentialraum = Tangente an die Helix.

Als ein Beispiel betrachten wir

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y) := y^2, \quad x_0 := (1, 1).$$

Wir haben  $y_0 = 1$  und  $f'(y_0) = 2$ . Gemäss [\(4.26\)](#) ist der Tangentialraum an  $\text{gr}(f)$  im Punkt  $x_0$  daher gegeben durch

$$T_{x_0} \text{gr}(f) = \{t(1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Das ist die Gerade durch den Ursprung und durch den Punkt  $(1, 2)$ .

**Beispiel 4.40.** [Tangentialraum an eine Helix] Wir betrachten die Helix

$$M := \{(y, \cos y, \sin y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

(Siehe Abbildung [4.9](#)) Sei  $x_0 \in M$ . Wir berechnen den Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $x_0$  mittels des Satzes [4.37\(i\)](#). Dazu schreiben wir  $y_0$  für die erste Koordinate von  $x_0$ .  $M$  ist der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(y) := (\cos y, \sin y).$$

Es gilt

$$Df(y) = f'(y) \cdot = (-\sin y, \cos y) \cdot : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Gemäss Satz [4.37\(i\)](#) gilt daher

$$T_{x_0} M = \text{gr}(Df(y_0)) = \{t(1, -\sin y_0, \cos y_0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Das ist eine Gerade in  $\mathbb{R}^3$ . Siehe Abbildung [4.16](#)

**Beispiel 4.41.** [Tangentialräume an die Sphäre] Wir betrachten die Sphäre

$$M := S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Sei  $x_0 \in S^{n-1}$ . Wir berechnen den Tangentialraum an  $S^{n-1}$  im Punkt  $x_0$  mittels des Satzes 4.37(iii). Dazu definieren wir die Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(1) = S^{n-1}, \quad Dg(x_0)v = 2\langle x_0, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen Beispiel 4.32 (Sphäre als reguläre Niveaumenge) ist 1 ein regulärer Wert von  $g$ . Gemäss Satz 4.37(iii) gilt darum, dass

$$T_{x_0}S^{n-1} = \ker Dg(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_0, v \rangle = 0\}. \quad (4.27)$$

**Bemerkung.** Wir können  $T_{x_0}S^{n-1}$  auch berechnen, indem wir das Beispiel 4.27 (lokale Parametrisierung der Sphäre) und Satz 4.37(ii) verwenden. Diese Berechnung ist allerdings komplizierter. Das zeigt, dass es empfehlenswert ist, die lokale Darstellung von  $M$  gut auszuwählen, wenn wir die Tangentialräume an  $M$  berechnen wollen.

**Bemerkung 4.42.** [Tangentialraum und Gradient] Der Tangentialraum hängt wie folgt mit dem Gradienten zusammen. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in U$ . Wir nehmen an, dass  $g$  in  $x$  differenzierbar ist. Wir schreiben  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Aus der Gleichheit  $Dg(x) = \langle \nabla g(x), \cdot \rangle$  folgt, dass

$$\ker Dg(x) = \nabla g(x)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g(x), v \rangle = 0\}.$$

Falls  $g$   $C^1$  ist und  $z \in \mathbb{R}$  ein regulärer Wert für  $g$  ist, dann ist der Tangentialraum an  $M := g^{-1}(z)$  im Punkt  $x$  gemäss Satz 4.37(iii) daher gegeben durch

$$T_x M = \ker Dg(x) = \nabla g(x)^\perp, \quad \forall x \in M.$$

Kurzgesagt: Der Gradient einer Funktion steht senkrecht auf jeder Niveaumenge, die zu einem regulären Wert gehört. Siehe Abbildung 4.17.

**Beispiel 4.43.** [Gradient und Niveaumenge] Wie in Beispiel 4.32 (Sphäre als reguläre Niveaumenge) definieren wir

$$g(x) := \|x\|^2.$$

Es gilt

$$g^{-1}(0) = S^{n-1}, \quad \nabla g(x) = 2x$$

und darum gemäss Bemerkung 4.42 dass

$$T_x S^{n-1} = (2x)^\perp.$$

Siehe Abbildung 4.18. Das stimmt mit (4.27) überein.

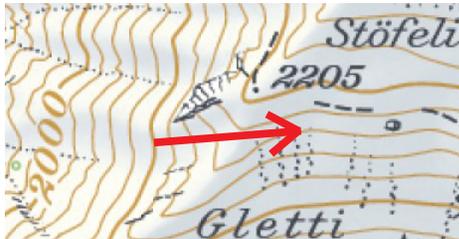


Abbildung 4.17: Der rote Pfeil ist der Gradient  $\nabla g(x)$  der Höhenfunktion  $g$  in einem Punkt  $x$ . Er steht senkrecht auf der Höhenlinie durch  $x$ .

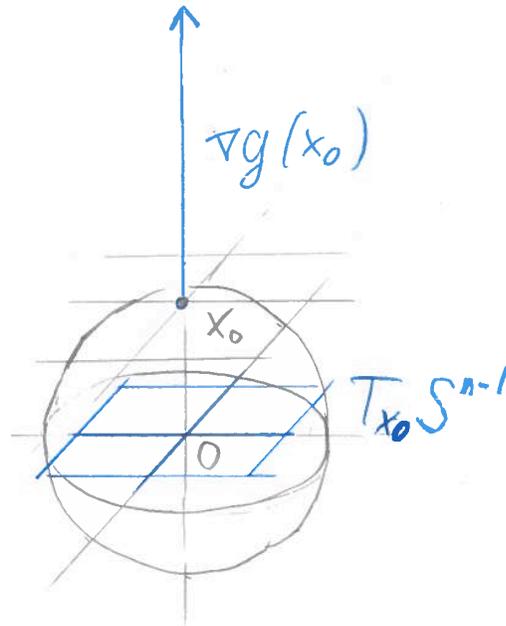


Abbildung 4.18: Der Gradient der Funktion  $g(x) := \|x\|^2$  und ein Tangentialraum an die Sphäre.

## 4.7 Tangentialabbildung

In Anwendungen spielen Abbildungen zwischen (Unter-)Mannigfaltigkeiten, insbesondere Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, eine wichtige Rolle. Zum Beispiel ist die Oberflächenladungsdichte auf einer metallenen Sphäre (=Kugeloberfläche) eine Funktion

$$\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^{12}$$

Diese Ladungsdichte ist nicht konstant, falls sich in der Nähe der Sphäre eine Ladung befindet. Diese Ladung drängt Elektronen in der Sphäre nämlich auf die weiter weg liegende Seite der Sphäre. Sie induziert also eine nichtkonstante Ladungsdichte auf der Sphäre. Die Oberflächenladungsdichte ist nur auf der Sphäre definiert. Es ist nicht sinnvoll, von  $\sigma(x)$  für einen Punkt  $x$  ausserhalb der Sphäre zu sprechen. Eine physikalisch relevante Frage ist zum Beispiel:

**Frage.** *In welchen Punkten ist die Ladungsdichte  $\sigma$  maximal?*

Ein allgemeineres Problem ist das folgende:

<sup>12</sup>Wir nehmen hier an, dass es sich um die Einheitssphäre  $S^2$  handelt, welche Mittelpunkt  $x_0 = 0$  ist und Radius  $r = 1$  besitzt. Des Weiteren nehmen wir an, dass die Ladungsdichte statisch ist, d. h., sich zeitlich nicht ändert.

**Problem.** Wir betrachten eine Funktion, die auf einer Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums definiert ist. Bestimme die Punkte, in denen die Funktion maximal ist.

Dieses Problem werden wir im Abschnitt 4.8 studieren. Dazu benötigen wir den Begriff der Tangentialabbildung. Die *Tangentialabbildung* einer  $C^1$ -Abbildung  $f$  zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  in einem Punkt  $x_0 \in M$  ist eine lineare Abbildung  $T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N$ . Sie verallgemeinert die Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen. Um die Tangentialabbildung zu definieren, brauchen wir das Folgende. Seien  $n, p \in \mathbb{N}_0$ ,  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $x_0 \in S$  und  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definition 4.44** ( $C^k$ -Eigenschaft, allgemeiner Definitionsbereich). Wir sagen, dass  $f$  um den Punkt  $x_0$   $C^k$  ist g. d. w. es eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_0$  und eine Abbildung  $F \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$  gibt, sodass

$$F = f \text{ auf } S \cap U. \quad (4.28)$$

Wir sagen, dass  $f$   $C^k$  ist g. d. w. diese Bedingung für jeden Punkt  $x_0 \in S$  erfüllt ist. Wir definieren

$$C^k(S, \mathbb{R}^p) := \{C^k\text{-Abbildung von } S \text{ nach } \mathbb{R}^p\}.$$

**Bemerkung.** Für  $k = 0$  ist  $f$   $C^0$  g. d. w.  $f$  stetig ist.

Eine *Fortsetzung* einer Funktion  $f$  ist eine Funktion  $F$ , sodass  $f$  eine Einschränkung von  $F$  ist. (Siehe 4.2.) Seien jetzt  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^p$   $C^1$ -Untermannigfaltigkeiten,  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^1$ -Abbildung und  $x_0 \in M$ .

**Hilfssatz 4.45.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$  eine Fortsetzung von  $f|_{M \cap U}$ . Es gilt

(i)

$$DF(x_0)(T_{x_0}M) \subseteq T_{f(x_0)}N.$$

(ii) Sei  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und  $\tilde{F} \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^p)$  noch eine Fortsetzung von  $f|_{M \cap \tilde{U}}$ . Dann gilt, dass

$$DF(x_0)|_{T_{x_0}M} = D\tilde{F}(x_0)|_{T_{x_0}M}.$$

Beweis: Das folgt aus der Kettenregel.

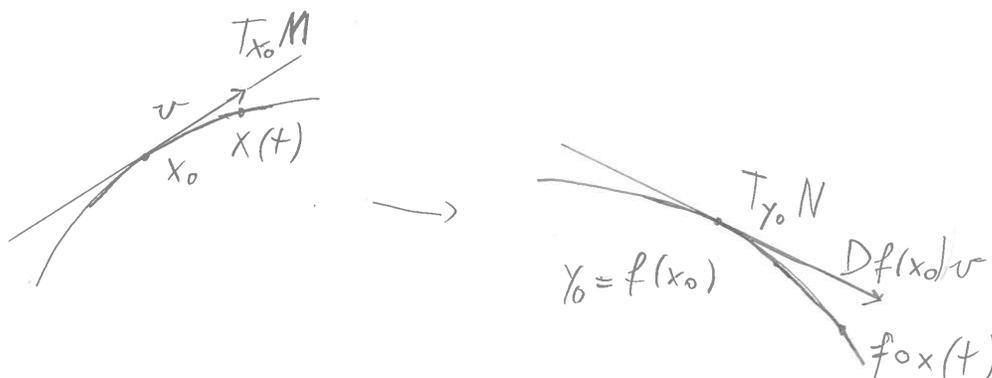


Abbildung 4.19: Tangentialabbildung einer Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten.

**Definition 4.46.** Wir definieren die Tangentialabbildung (oder Ableitung) von  $f$  im Punkt  $x_0$  als

$$Df(x_0) := DF(x_0)|_{T_{x_0}M} : T_{x_0}M \rightarrow T_{f(x_0)}N, \quad (4.29)$$

wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  und  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$  eine Fortsetzung von  $f|_{M \cap U}$  ist.

**Bemerkungen.** • Gemäss Hilfssatz 4.45(i) nimmt  $Df(x_0)$  tatsächlich Werte in  $T_{f(x_0)}N$  an. Gemäss Hilfssatz 4.45(ii) hängt  $Df(x_0)$  nicht von der Wahl von  $F$  ab. Diese Abbildung ist darum wohldefiniert.

- Falls  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge ist, dann stimmen die Definitionen 4.46 und 3.6 (S. 71, Ableitung einer Funktion zwischen Koordinatenräumen) überein. Definition 4.46 verallgemeinert also Definition 3.6
- Im Buch [DK04a, p. 137, Definition 5.2.1] wird die Tangentialabbildung für eine Abbildung definiert, die auf einer offenen Umgebung von  $x_0$  definiert ist. Wir benötigen jedoch die Definition für eine Funktion, die nur auf  $M$  definiert ist, wie in Definition 4.46.

**Bemerkung.** Aus der Kettenregel folgt, dass

$$Df(x_0)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ x(t),$$

wobei  $x$  ein Weg in  $M$  ist, sodass  $\dot{x}(0) = v$ . Das ist eine alternative Beschreibung der Tangentialabbildung. Abbildung 4.19 verdeutlicht diese Beschreibung.

**Beispiel 4.47.** [Tangentialabbildung eines Weges] Seien  $N \subseteq \mathbb{R}^p$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit,  $f \in C^1(\mathbb{R}, N)$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$Df(x_0) = f'(x_0) \cdot : \mathbb{R} \rightarrow T_{f(x_0)}N.$$



Abbildung 4.20: Tangentialabbildung eines Weges in einer Untermannigfaltigkeit.

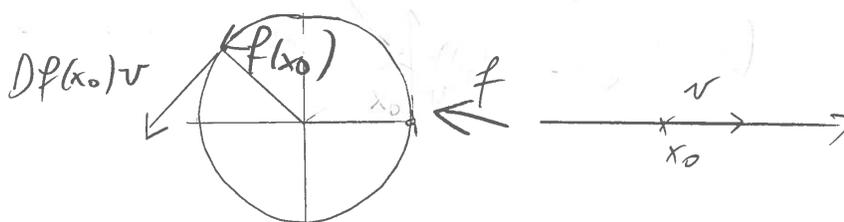


Abbildung 4.21: Tangentialabbildung für eine Parametrisierung des Kreises.

Wir können diese lineare Abbildung mit dem Vektor  $f'(x_0) \in T_{f(x_0)}N$  identifizieren. Siehe Abbildung [4.20](#). Als ein konkretes Beispiel betrachten wir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (\cos x, \sin x), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$Df(x_0) = f'(x_0) = (-\sin x, \cos x),$$

siehe Abbildung [4.21](#)

**Bemerkung.** Falls wir  $x = t \in M = \mathbb{R}$  als Zeit und  $f$  als den Weg eines Teilchens in  $N$  interpretieren, dann ist  $\dot{f}(t) = f'(t)$  der *Geschwindigkeitsvektor* zum Zeitpunkt  $t$ . Er ist tangential an  $N$ .  $N$  beschreibt *holonome Zwangsbedingungen* in der klassischen Mechanik.

**Beispiel 4.48.** [Tangentialabbildung einer Potenzfunktion] Seien  $m \in \mathbb{Z}$  und

$$f: S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1, \quad f(\cos t, \sin t) := (\cos(mt), \sin(mt)).$$

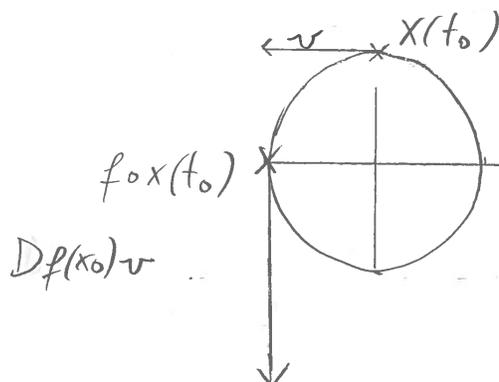
Diese Abbildung ist glatt, da sie die Einschränkung der  $m$ -ten Potenzfunktion

$$F: \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) := z^m,$$

auf den Einheitskreis  $S^1$  ist.<sup>13</sup> Seien

$$z \in S^1, \quad v := iz = (-z_2, z_1).$$

<sup>13</sup>Das folgt aus der Formel von de Moivre, die besagt, dass  $(\cos t + i \sin t)^m = \cos(mt) + i \sin(mt)$ .

Abbildung 4.22: Tangentialabbildung von  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) := z^2$ .

Da  $\langle z, v \rangle = -z_1 z_2 + z_2 z_1 = 0$ , gilt gemäss Beispiel [4.41](#), dass  $v \in T_z S^1$ . Die Tangentialabbildung von  $f$  bildet diesen Vektor ab auf

$$\begin{aligned} Df(z)v &= DF(z)v \\ &= F'(z)v \quad (\text{Überprüfen Sie das mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen!}) \\ &= mz^{m-1}iz \\ &= miz^m \in T_{f(z)}S^1 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $F'$  die komplexe Ableitung von  $F$ . Siehe Abbildung [4.22](#).

## 4.8 Kritische Punkte einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ , Lagrange-Multiplikatorenregel

Wir betrachten das folgende Problem. Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion.

**Problem.** *Finde das Maximum und das Minimum von  $f$  (unter der Annahme, dass  $f$  ein Maximum und ein Minimum besitzt)!*

Manchmal ist  $f$  die Einschränkung einer Funktion  $F$ , die auf einer Umgebung von  $M$  definiert ist. Problem [4.8](#) ist dann das Problem,  $F(x)$  unter der *Nebenbedingung*  $x \in M$  zu maximieren (oder minimieren).

Problem [4.8](#) tritt in verschiedenen Kontexten auf. In der Elektrostatik wird zum Beispiel die Oberflächenladungsdichte auf einer metallenen Kugel (=Kugeloberfläche) betrachtet, welche durch eine Ladung induziert wird, die sich in der Nähe der Kugel

befindet. Ein Spezialfall des Problems [4.8](#) ist es, das Maximum dieser Ladungsdichte zu bestimmen.

Jeder Punkt, in dem eine Funktion ein Extremum (Maximum oder Minimum) annimmt, ist ein kritischer Punkt der Funktion. Das bedeutet, dass die Tangentialabbildung in diesem Punkt verschwindet. Die Lagrange-Multiplikatorenregel ist eine Methode, um kritische Punkte zu finden. Diese Regel kann daher dazu gebraucht werden, um Problem [4.8](#) zu lösen.

**Definition 4.49.** Ein Punkt  $x_0 \in M$  heisst kritischer (oder stationärer) Punkt für  $f$  g. d. w. die Tangentialabbildung von  $f$  in  $x_0$  verschwindet, d. h.

$$Df(x_0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\text{Crit } f := \{\text{kritische Punkte für } f\}.$$

**Bemerkungen 4.50.** [kritischer Punkt, Extremum]

- (i) Falls  $M$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist, dann ist  $x_0$  kritisch im Sinn der Definition [4.49](#) g. d. w.  $x_0$  kritisch im Sinn der Definition [3.61](#) ist. Definition [4.49](#) verallgemeinert also Definition [3.61](#).
- (ii) Falls  $f$  in  $x_0$  ein Maximum oder Minimum annimmt, dann ist  $x_0$  ein kritischer Punkt für  $f$ . Das verallgemeinert Satz [3.67\(ii\)](#) (Satz von Fermat über kritische Punkte).

**Beispiel 4.51.** [kritische Punkte der Höhenfunktion auf der Sphäre] Sei

$$f : M := S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_n.$$

Dann gilt

$$\text{Crit } f = \{x_{\pm} := \pm e_n = (0, \dots, 0, \pm 1)\}.$$

Um das einzusehen, definieren wir

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := x_n.$$

Sei  $v \in T_{x_+} S^{n-1}$ . Da  $F$  eine glatte Fortsetzung der Funktion  $f$  ist, gilt gemäss Definition [4.46](#) (Tangentialabbildung), dass

$$\begin{aligned} Df(x_+)v &= DF(x_+)v \\ &= v_n \quad (\text{gemäss Beispiel [3.8](#), Ableitung einer affinen Funktion}) \\ &= \langle x_+, v \rangle \\ &= 0 \quad (\text{gemäss Beispiel [4.41](#)}). \end{aligned}$$



Abbildung 4.23: Joseph-Louis Lagrange, italienischer Mathematiker und Astronom, 1736–1813.

Darum gilt  $x_+ \in \text{Crit } f$ . Ähnliche Argumente zeigen, dass  $x_- \in \text{Crit } f$  und dass  $x_{\pm}$  die einzigen kritischen Punkte von  $f$  sind. (Überprüfen Sie das!) Tatsächlich nimmt  $f$  in  $x_+$  sein Maximum und in  $x_-$  sein Minimum an.

Falls es Funktionen  $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass  $M = g^{-1}(0)$  und  $f = F|_M$ , dann können wir das Problem 4.8 mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel lösen. Das folgt aus dem nächsten Satz. Seien  $n, p \in \mathbb{N}_0$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $F \in C^1(U, \mathbb{R})$  und  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ .

**Definition 4.52.** Wir definieren die Lagrangefunktion für  $(F, g)$  als die Funktion

$$L := L_{F,g} : U \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda^T g(x). \quad (4.30)$$

Wir definieren

$$M := g^{-1}(0) \subseteq U, \quad f := F|_M.$$

**Satz 4.53** (Lagrange-Multiplikatorenregel). *Wir nehmen an, dass 0 ein regulärer Wert von  $g$  ist. Sei  $x_0 \in U$ . Dann gilt  $x_0 \in \text{Crit } f$  g. d. w. es ein  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  gibt, sodass  $(x_0, \lambda) \in \text{Crit } L$ .*

Der Beweis dieses Satzes basiert auf der Tatsache  $\ker Dg(x_0) = T_{x_0}M$  (Satz 4.37) und linearer Algebra.

Der Satz ist nach Joseph-Louis Lagrange benannt, siehe Abbildung 4.23

**Bemerkungen.** • Gemäss dem Satz vom regulären Wert (Satz 4.30) ist  $M = g^{-1}(0)$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - p$ . Darum ist die Bedingung  $x_0 \in \text{Crit } f$  sinnvoll.

- Die Funktion  $f$  ist nur auf  $M$  definiert. Darum gilt  $\text{Crit } f \subseteq M$ .
- Die Bedingung  $x_0 \in \text{Crit } f$  impliziert *nicht*, dass  $x_0 \in \text{Crit } F$ .
- Im Buch [\[DK04a\]](#) wird die Notation  $f$  für  $F$  verwendet.
- Die Bedingung  $(x_0, \lambda) \in \text{Crit } L$  gilt genau dann, falls

$$DF(x_0) = \lambda^T Dg(x_0), \quad (4.31)$$

$$g(x_0) = 0. \quad (4.32)$$

(Bemerkenswerterweise erhalten wir auch noch die zweite Gleichung.)

- Falls  $x_0 \in \text{Crit } f$ , dann heisst  $\lambda$  wie in Satz [4.53](#) der *Lagrange-Multiplikator* für  $x_0$ . Er ist eindeutig. (Warum?)

**Korollar 4.54** (Maximum und Minimum). *Wir nehmen an, dass  $g$  eine Submersion ist. Sei  $x_0 \in M$  ein Punkt, in dem  $f$  sein Maximum oder Minimum annimmt. Dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ , sodass  $DF(x_0) = \lambda^T Dg(x_0)$ .*

**Beweis:** Das folgt aus Bemerkung [4.50\(ii\)](#) und Satz [4.53](#).  $\square$

Mit Hilfe des Korollars [4.54](#) können wir Problem [4.8](#) lösen.

**Beispiel 4.55.** [Sphäre und Lagrange-Multiplikatoren] Wir definieren

$$\text{pr} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{pr}(x) := x_n, \quad f := \text{pr}|_{S^{n-1}}.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte von  $f$  mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel. Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} U &:= \mathbb{R}^n, & g : U &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &:= \|x\|^2 - 1, & F &:= \text{pr} : U \rightarrow \mathbb{R}, \\ L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p=1} &\rightarrow \mathbb{R}, & L(x, \lambda) &:= F(x) - \lambda^T g(x) = x_n - \lambda(\|x\|^2 - 1). \end{aligned}$$

Die Gleichungen [\(4.31 4.32\)](#) werden zu

$$\text{pr} = 2\lambda \langle x_0, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in S^{n-1}.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$(x_0, \lambda) = \left(x_+, \frac{1}{2}\right), \quad \left(x_-, -\frac{1}{2}\right), \quad x_{\pm} := \pm e_n.$$

(Überprüfen Sie das!) Gemäss Satz [4.53](#) gilt daher  $\text{Crit } f = \{x_{\pm}\}$ . Das stimmt mit Beispiel [4.51](#) überein.



# Kapitel 5

## Mehrdimensionale Riemann-Integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

Das Integral einer Funktion  $f$  von  $n$  Veränderlichen ist der  $(n + 1)$ -dimensionale Inhalt (mit Vorzeichen) zwischen der  $(x_1, \dots, x_n)$ -Hyperebene und dem Graphen von  $f$ . Heuristisch ist das Integral von  $f$  gleich der Summe

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx,$$

wobei  $dx$  das  $n$ -dimensionale Volumen eines unendlich kleinen Quaders um den Punkt  $x$  ist.

Das (eigentliche) Riemann-Integral einer Funktion mehrerer Variablen wird definiert, indem wir die Funktion von oben und unten mit Treppenfunktionen annähern. Es verallgemeinert das Riemann-Integral einer Funktion *einer* Variablen. Der Satz von Fubini besagt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dz dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(y, z) dy dz.$$

Diesen Satz können wir verwenden, um mehrdimensionale Integrale mittels wiederholter eindimensionaler Integration zu berechnen.

In diesem Kapitel werden wir auch das Jordan-Mass behandeln, das die Idee des  $n$ -dimensionalen Inhalts präzise macht.

## 5.1 Riemann-Integral

Um das Riemann-Integral zu definieren, benötigen wir das Folgende: Seien  $S$  eine Menge und  $A \subseteq S$ . Wir definieren die *Indikatorfunktion* (oder *charakteristische Funktion*) der Menge  $A$  als die Funktion

$$\chi_A : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Erinnerung:  $f$  heisst *beschränkt* g. d. w. es eine Konstante  $C \in [0, \infty)$  gibt, sodass

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in S. \quad (5.1)$$

**Definition 5.1** (eigentliches Riemann-Integral). (i) Ein  $n$ -dimensionaler (beschränkter) Quader (oder Rechteck) ist ein Produkt der Form

$$R = \prod_{i=1}^n I_i = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

wobei  $I_1, \dots, I_n$  beschränkte Intervalle sind. Diese dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

(ii) Wir schreiben die Länge eines Intervalls  $I$  als  $|I|$ . Wir definieren den ( $n$ -dimensionalen) Inhalt (oder das ( $n$ -dimensionale) Volumen) eines Quaders  $R = \prod_{i=1}^n I_i$  als

$$\text{vol}(R) := \text{vol}_n(R) = |R| := \prod_{i=1}^n |I_i| = |I_1| \cdots |I_n|.$$

Sei  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader.

(iii) Wir nennen  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion g. d. w.  $\varphi$  eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von  $n$ -dimensionalen Quadern ist.

(iv) Sei  $\mathcal{R}$  eine endliche Kollektion (=Menge) von Quadern, die in  $R$  enthalten sind, und  $c_Q \in \mathbb{R}$  für  $Q \in \mathcal{R}$ . Wir definieren das Riemann-Integral der Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q$$

als

$$\int_R \varphi(x) dx := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q |Q|. \quad (5.2)$$



Abbildung 5.1: Bernhard Riemann, deutscher Mathematiker, 1826–1866.

(v) Sei  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Wir definieren das untere und das obere Riemann-Integral von  $f$  (über  $R$ ) als

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx := \sup \left\{ \int_R \varphi(x) dx \mid \varphi : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion } \leq f \right\}, \quad (5.3)$$

$$\int_{\overline{R}} f(x) dx := \inf \left\{ \int_R \psi(x) dx \mid \psi : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion } \geq f \right\}. \quad (5.4)$$

Wir nennen  $f$  eigentlich Riemann-integrierbar (über  $R$ ) g. d. w.

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx \geq \int_{\overline{R}} f(x) dx. \quad (5.5)$$

In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von  $f$  (über  $R$ ) als

$$\int_R f(x) dx := \int_{\underline{R}} f(x) dx. \quad (5.6)$$

Dieses Integral ist nach Bernhard Riemann benannt, siehe Abbildung [5.1](#).

### Erklärungen:

**Zu (i):** Ein Beispiel eines Quaders ist  $R = [0, 1] \times (0, 2] \times [1, 3) \times (-1, 0)$ .

**Zu (ii):** Zum Beispiel ist das Volumen von  $R := [0, 1] \times (0, 2] \times [1, 3) \times (-1, 0)$  gleich  $|R| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ . Das Volumen eines Quaders verallgemeinert also die Begriffe *Länge* eines Intervalls, *Oberfläche* eines Rechtecks und (*dreidimensionales*) *Volumen* eines dreidimensionalen Quaders.

Zu (iii) und (iv):  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Treppenfunktion g. d. w. we eine endliche Kollektion  $\mathcal{R}$  von Quadern gibt, die in  $R$  enthalten sind, und es Zahlen  $c_Q \in \mathbb{R}$  für  $Q \in \mathcal{R}$  gibt, sodass

$$\varphi = \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q. \quad (5.7)$$

**Bemerkung:** Wir schreiben  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$  mit  $R_j \neq R_\ell$  für  $j \neq \ell$  und  $c_j := c_{R_j}$ . Dann gilt

$$\varphi = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{R_j}, \quad \int_R \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j |R_j|.$$

Ein Vorteil der Notation (5.7) ist, dass wir dafür keinen Index  $j$  brauchen. Sei  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Wir können  $\varphi$  als eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Quadern schreiben, die eine Zerlegung von  $R$  bilden. Das folgt unmittelbar aus dem nächsten Hilfssatz.

**Hilfssatz 5.2** (Verfeinerung einer Kollektion von Quadern). *Sei  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $\mathcal{R}$  eine endliche Kollektion von Quadern, die in  $R$  enthalten sind. Dann gibt es eine endliche Kollektion von Quadern  $\mathcal{R}'$ , die eine Zerlegung von  $R$  bilden, mit der folgenden Eigenschaft:*

*Falls ein Quader  $Q' \in \mathcal{R}'$  einen Quader  $Q \in \mathcal{R}$  schneidet, dann ist  $Q'$  in  $Q$  enthalten.*

Beweis: Im Fall  $n = 1$  folgt diese Aussage mittels Induktion. Die allgemeine Situation kann auf den Fall  $n = 1$  reduziert werden.

**Bemerkungen.** • (Zerlegung) Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heissen *disjunkt* g. d. w. sie sich nicht schneiden, d. h.,  $A \cap B = \emptyset$ . Eine *Zerlegung* (oder *Partition*) einer Menge  $S$  ist eine Kollektion  $\mathcal{P}$  nichtleerer (paarweise) disjunkter Mengen, deren Vereinigung gleich  $S$  ist, also

$$S = \bigcup \mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A.$$

- Wir nennen eine Kollektion  $\mathcal{R}'$  wie in Hilfssatz 5.2 eine *Verfeinerung* der Kollektion  $\mathcal{R} \cup \{R\}$ .
- Im Buch [DK04b] wird das Wort “partition” umdefiniert. In dieser neuen Definition dürfen sich die Quader auf dem Rand überlappen.

**Beispiel 5.3.**  $n = 1$ ,  $R := (-1, 3)$ ,  $\mathcal{R} := \{(0, 2), (1, 3)\}$ . Die Menge

$$\mathcal{R}' := \{(-1, 0], (0, 1], (1, 2), [2, 3)\}$$

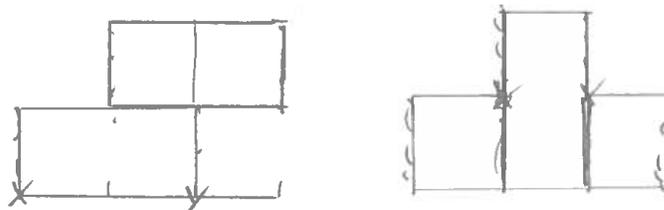


Abbildung 5.2: Aufspalten einer Summe charakteristischer Funktionen. Der Graph der rechten Funktion hat die Form einer Treppe. Das ist der Grund für den Namen “Treppenfunktion”.

ist eine Verfeinerung der Kollektion  $\mathcal{R} \cup \{R\}$ . Wir betrachten die Treppenfunktion

$$\varphi := \chi_{(0,2)} + \chi_{(1,3)}.$$

Mit Hilfe der Verfeinerung  $\mathcal{R}'$  können wir  $\varphi$  wie folgt schreiben:

$$\varphi = \chi_{(0,1)} + 2\chi_{(1,2)} + \chi_{(2,3)}, \quad (5.8)$$

siehe Abbildung 5.2. Somit haben wir  $\varphi$  als eine Linearkombination von Indikatorfunktionen von Quadern  $Q' \in \mathcal{R}'$  geschrieben, die eine Zerlegung von  $R$  bilden.

**Zu (iv):** Der nächste Hilfssatz zeigt, dass das Integral einer Treppenfunktion (gegeben durch (5.2)) wohldefiniert ist, d. h., es hängt nicht davon ab, wie wir  $\varphi$  als eine endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von Quadern schreiben. Seien  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}'$  endliche Kollektionen von Quadern,  $c_Q \in \mathbb{R}$  für  $Q \in \mathcal{R}$  und  $c'_{Q'} \in \mathbb{R}$  voor  $Q' \in \mathcal{R}'$ .

**Hilfssatz 5.4** (Integral einer Treppenfunktion). *Falls*

$$\sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q = \sum_{Q' \in \mathcal{R}'} c'_{Q'} \chi_{Q'},$$

dann gilt

$$\sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q |Q| = \sum_{Q' \in \mathcal{R}'} c'_{Q'} |Q'|.$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf Hilfssatz 5.2.

Sei jetzt  $R$  ein Quader und  $\varphi \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Gemäss Hilfssatz 5.2 (Verfeinerung einer Kollektion von Quadern) gibt es eine endliche Kollektion  $\mathcal{R}'$  disjunkter Quader, die in  $R$  enthalten sind, und es gibt Zahlen  $c'_{Q'} \in \mathbb{R}$  für  $Q' \in \mathcal{R}'$ , sodass

$$\varphi = \sum_{Q' \in \mathcal{R}'} c'_{Q'} \chi_{Q'}.$$

Es gilt

$$\int_R \varphi(x) dx = \sum_{Q' \in \mathcal{R}'} c_{Q'} |Q'|. \quad (5.9)$$

Das ist der  $(n + 1)$ -dimensionale Inhalt (mit Vorzeichen) Zwischen der  $(x_1, \dots, x_n)$ -Hyperebene<sup>1</sup> und dem Graphen von  $\varphi$ . Darum stimmt unsere Definition des Integrals einer Treppenfunktion mit unserer Intuition überein. Im Beispiel 5.3 gilt gemäss (5.9), dass

$$\begin{aligned} \int_{[0,3]} \varphi(x) dx &= 1 \cdot |(0, 1]| + 2|(1, 2)| + 1 \cdot |[2, 3)| \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Das ist tatsächlich der  $(1 + 1)$ -dimensionale Inhalt<sup>2</sup> zwischen der  $x_1$ -Hyperebene<sup>3</sup> und dem Graphen von  $\varphi$ . **Zu (v):** Das präzisiert die Idee, dass wir das Integral erhalten, indem wir die Funktion von oben und unten mit Treppenfunktionen annähern.

**Bemerkungen. Zum Buch [DK04b]:**

- (i) In [DK04b] Definition 6.2.3, p. 426] wird das untere/ obere Riemann-Integral ein bisschen anders definiert, indem Zerlegungen des Quaders gebraucht werden, worauf  $f$  definiert ist. Die Definitionen hier und im Buch sind äquivalent. Daher ist der Begriff der (eigentlichen) Riemann-Integrierbarkeit hier und im Buch äquivalent, und die Integrale stimmen miteinander überein. Die Definition hier scheint mir einfacher, flexibler und brauchbarer: Die Intervalle in der Definition dürfen offen, halb-offen oder abgeschlossen sein. Des Weiteren ist die Summe zweier Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion. Das folgt sofort aus der Definition. Diese Eigenschaft kann gebraucht werden, um Linearität der Integration zu beweisen.
- (ii) In [DK04b] Definition 6.4.1, p. 435] wird der Begriff einer Treppenfunktion ein bisschen anders definiert.

**Beispiel 5.5.** [Integral der charakteristischen Funktion eines Dreiecks] Die Funktion

$$f : R := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1 \geq x_2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Damit meinen wir den Untervektorraum  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  von  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>d. h. die Fläche

<sup>3</sup>d. h. der  $x_1$ -Achse

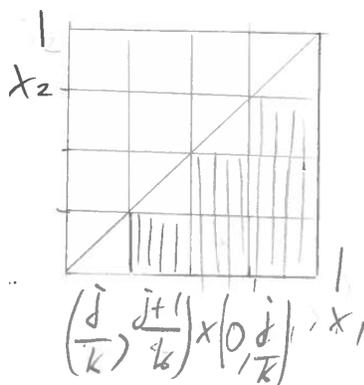


Abbildung 5.3: Die Treppenfunktion  $\varphi$  hat Träger im schraffierten Gebiet.

ist eigentlich Riemann-Integrierbar mit Integral  $= \frac{1}{2}$ . Beweis: Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir definieren

$$\varphi := \sum_{j=1}^{k-1} \chi_{\left(\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right) \times \left(0, \frac{j}{k}\right)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

siehe die Abbildung 5.3. Das ist eine Treppenfunktion, die  $\leq f$  ist. (Überprüfen Sie das!) Darum gilt

$$\int \varphi(x) dx \leq \int_{\underline{R}} f(x) dx.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \frac{j}{k} = \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.$$

Da  $k$  beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx \geq \frac{1}{2}.$$

Ein ähnliches Argument zeigt, dass

$$\frac{1}{2} \geq \int_{\overline{R}} f(x) dx, \quad \text{also} \quad \int_{\underline{R}} f(x) dx \geq \int_{\overline{R}} f(x) dx.$$

Daraus folgt, dass  $f$  eigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

**Beispiel 5.6.** [nicht-Riemann-integrierbare Funktion] Die Funktion  $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : R := [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar. Siehe Übungsserie 11.

**Bemerkung.** Dieses Beispiel wurde schon in Analysis 1 behandelt. (Siehe Stra, Beispiel 6.2.2. ii), S. 134].)

## 5.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Seien  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Die folgende Proposition fasst einige grundlegende Eigenschaften des (unteren und oberen) Riemann-Integrals zusammen.

**Proposition 5.7** (Riemann-Integration). (i) (unteres und oberes Integral) Es gilt

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx \leq \int_{\overline{R}} f(x) dx. \quad (5.10)$$

(ii) (Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit)  $f$  ist Riemann-integrierbar g. d. w. es für jedes  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : R \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad (5.11)$$

$$\int_R \psi(x) dx - \int_R \varphi(x) dx < \varepsilon. \quad (5.12)$$

(iii) (Treppenfunktion integrierbar) Jede Treppenfunktion  $f = \varphi$  ist Riemann-integrierbar. Ihr Riemann-Integral stimmt mit dem Integral in Definition 5.1 (iv) überein.

(iv) (stetige Funktion Riemann-integrierbar) Falls  $R$  abgeschlossen (und beschränkt) ist und  $f$  stetig, dann ist  $f$  Riemann-integrierbar.

Seien jetzt  $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbare Funktionen und  $c \in \mathbb{R}$ .

(v) (Monotonie) Falls  $f \leq g$ , dann gilt

$$\int_R f(x) dx \leq \int_R g(x) dx. \quad (5.13)$$

(vi) (Linearität)  $cf$  und  $f + g$  sind Riemann-integrierbar und

$$\int_R cf(x) dx = c \int_R f(x) dx, \quad (5.14)$$

$$\int_R (f + g)(x) dx = \int_R f(x) dx + \int_R g(x) dx. \quad (5.15)$$

- (vii) Das Produkt zweier Riemann-integrierbarer Funktionen ist Riemann-integrierbar.
- (viii) (Minimum, Maximum, Absolutbetrag)  $\min\{f, g\}$ ,  $\max\{f, g\}$  und  $|f|$  sind Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_R f dx \right| \leq \int_R |f| dx. \quad (5.16)$$

Beweis: (i) folgt mit Hilfe von Hilfssatz 5.2

(ii) folgt aus der Definition von Riemann-Integrierbarkeit.

(iii) folgt aus der Definition des Riemann-Integrals, indem wir die Treppenfunktion  $f = \varphi$  betrachten, und aus (i).

(iv): [Stra] Satz 8.1.1, S. 197]

(v vi vii viii): [DK04b, Theorem 6.2.8, p. 428]

**Bemerkungen.** [Riemann-Integration]

- (i) impliziert, dass  $f$  genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn in (5.5) Gleichheit gilt, d. h.  $\int_{-R} f(x) dx = \overline{\int}_R f(x) dx$ .
- Aussagen (iii iv vi) liefern viele Beispiele für Riemann-integrierbare Funktionen. Zum Beispiel ist

$$f : R := [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x < 0, \\ x + 2, & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

Riemann-integrierbar. Um das einzusehen, definieren wir

$$g, h : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad g := 2\chi_{[0,1]}, \quad h(x) := x.$$

$h$  ist eine Treppenfunktion und darum gemäss (iii) Riemann-integrierbar.  $g$  ist ein Polynom, daher stetig und darum gemäss (iv) Riemann-integrierbar. Es gilt  $f = g + h$ , daher ist  $f$  eine Linearkombination von  $g$  und  $h$  und darum gemäss (vi) Riemann-integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_R f(x) dx &= \int_R g(x) dx + \int_R h(x) dx && \text{(gemäss (vi))} \\ &= 2 \cdot |[0, 1]| + \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^1 \end{aligned}$$

(Definition des Integrals einer Treppenfunktion und Analysis 1)  
 $= 2$ .

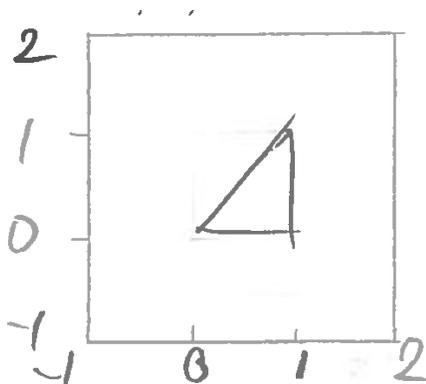


Abbildung 5.4: Die Menge  $S := R \setminus \Delta$ .

**Beispiel 5.8.** [Quadrat ohne Dreieck] Wir definieren

$$R := (-1, 2) \times (-1, 2), \quad \Delta := \{x \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x_1 \geq x_2\}, \quad S := R \setminus \Delta,$$

siehe Abbildung 5.4.  $\chi_R$  ist eine Treppenfunktion und daher gemäss Proposition 5.7(iii) Riemann-integrierbar mit Integral  $= |R| = 9$ . Gemäss Beispiel 5.5 ist  $\chi_\Delta$  Riemann-integrierbar mit Integral  $\frac{1}{2}$ . Es gilt

$$\chi_S = \chi_R - \chi_\Delta.$$

Gemäss Proposition 5.7(vi) (Linearität) gilt darum

$$\int_R \chi_S dx = \int_R \chi_R dx - \int_R \chi_\Delta dx = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

**Beispiel 5.9.** [integrierbare Funktion] Die Funktion

$$f : R := [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(x_1 + e^{x_2}),$$

ist stetig und daher gemäss Proposition 5.7(iv) Riemann-integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_R f(x) dx \right| &\leq \int_R |f(x)| dx && \text{(gemäss Proposition 5.7(viii))} \\ &\leq \int_R 1 dx && \text{(gemäss Proposition 5.7(v))} \\ &= |R| = 2\pi, \end{aligned}$$

also  $\left| \int_R f(x) dx \right| \leq 2\pi$ .

**Problem.** Finde den genauen Wert des Integrals  $\int_R f(x) dx$ .

Wir werden dieses Problem im Beispiel 5.11 mit Hilfe des Satzes von Fubini lösen.



Abbildung 5.5: Guido Fubini, italienischer Mathematiker, 1879–1943.

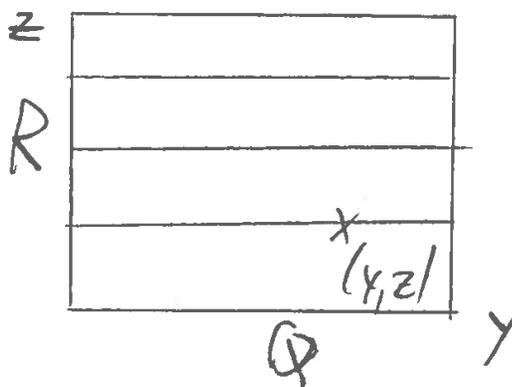


Abbildung 5.6: Im wiederholten Integral  $\int_R \int_Q f(y, z) dy dz$  integrieren wir zuerst in horizontale Richtung und dann in vertikale Richtung. Der Satz von Fubini besagt, dass das  $\int_{Q \times R} f(x) dx$  ergibt.

### 5.3 Satz von Fubini, mehrfache Integration

Der Satz von Fubini besagt, dass ein mehrdimensionales Integral gleich einem zweifachen Integral in tieferen Dimensionen ist. Damit können wir ein mehrdimensionales Integral als ein wiederholtes eindimensionales Integral schreiben. Das ist ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen. Seien  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  Quader und  $f : Q \times R \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Satz 5.10** (Satz von Fubini, wiederholte Integration). *Wir nehmen an, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist. Dann sind die Funktionen*

$$R \ni z \mapsto \int_Q f(y, z) dy \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$$

$$R \ni z \mapsto \overline{\int}_Q f(y, z) dy \in \mathbb{R} \quad (5.18)$$

Riemann-integrierbar, und

$$\int_{Q \times R} f(x) dx = \int_R \int_Q f(y, z) dy dz = \int_R \overline{\int}_Q f(y, z) dy dz. \quad (5.19)$$

Beweis: [DK04b, Theorem 6.4.2, p. 436]

Dieser Satz ist nach Guido Fubini benannt, siehe Abbildung 5.5. Abbildung 5.6 verdeutlicht den Satz.

**Bemerkung.** [Satz von Fubini, wiederholte Integration] Im Allgemeinen können wir  $\int$  und  $\overline{\int}$  nicht durch  $\int$  ersetzen. Beispiel:

$$Q := [0, 1], \quad R := [0, 1], \quad f := \chi_{(Q \cap [0, 1]) \times \{0\}}.$$

$f$  ist Riemann-integrierbar (über  $Q \times R$ ), aber für  $z = 0$  ist die Funktion  $f(\cdot, z) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  nicht Riemann-integrierbar. (Siehe Übungsserie 10.) Daher ergibt das Integral  $\int_Q f(y, 0)dy$  keinen Sinn.

**Beispiel 5.11.** [Satz von Fubini, wiederholte Integration] Wir definieren

$$Q := [0, 2\pi], \quad R := [0, 1], \quad f : Q \times R \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y, z) := \sin(y + e^z).$$

Gemäss Beispiel 5.9 ist  $f$  Riemann-integrierbar. Ein ähnliches Argument zeigt, dass  $f(\cdot, z)$  für jedes  $z \in R$  Riemann-integrierbar ist. Für jedes  $z \in [0, 1]$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(y + e^z)dy &= -\cos(y + e^z)\Big|_{y=0}^{2\pi} \\ &= 0 \quad (\text{da } \cos \text{ } 2\pi\text{-periodisch ist}). \end{aligned}$$

Gemäss Satz 5.10 gilt darum, dass

$$\int_{Q \times R} f dx = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \sin(y + e^z)dy \right) dz = 0.$$

**Korollar 5.12** (Vertauschen der Integrationsreihenfolge). *Falls  $Q$  und  $R$  abgeschlossen und  $f$  stetig sind, dann sind die Funktionen  $z \mapsto \int_Q f(y, z)dy$  und  $y \mapsto \int_R f(y, z)dz$  Riemann-integrierbar, und*

$$\int_R \left( \int_Q f(y, z)dy \right) dz = \int_{Q \times R} f(x)dx \tag{5.20}$$

$$= \int_Q \left( \int_R f(y, z)dz \right) dy. \tag{5.21}$$

Beweis: Das folgt aus Satz 5.10.

**Bemerkung.** Gemäss Proposition 5.7(iv) (stetige Funktion Riemann-integrierbar) sind die Integrale  $\int_{Q \times R} f(x)dx$ ,  $\int_Q f(y, z)dy$  und  $\int_R f(y, z)dz$  wohldefiniert (für alle  $z \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}$ ). Die Aussage des Korollars 5.12 ist darum sinnvoll.

**Bemerkung.** Unter den Annahmen von Korollar 5.12 sind die Funktionen  $z \mapsto \int_Q f(y, z)dy$  und  $y \mapsto \int_R f(y, z)dz$  sogar stetig und darum Riemann-integrierbar wegen Proposition 5.7(iv).

**Beispiel 5.13.** Problem: Berechne

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sin(y + e^z) dz \right) dy!$$

Lösung: Gemäss Korollar [5.12](#) und Beispiel [5.9](#) ist dieses Integral gleich

$$\int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \sin(y + e^z) dy \right) dz = 0.$$

**Bemerkung.** Sei  $a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$ , für  $i = 1, \dots, n$ , und

$$f : R := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Gemäss Satz [5.10](#) (Fubini) gilt

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_n.$$

**Beispiel 5.14.** Für

$$f : R := [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2 x_3$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_R f(x) dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2 x_3 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 x_2 x_3 dx_2 dx_3 \quad \left( \text{da } \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x_3 dx_3 \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Achtung:**  $f$  braucht nicht Riemann-integrierbar zu sein, falls die wiederholten Integrale existieren. Falls sie existieren, brauchen die wiederholten Integrale auch nicht gleich zu sein, falls  $f$  nicht Riemann-integrierbar ist:

**Beispiel 5.15.** [wiederholte Integrale sind verschieden] Wir betrachten

$$f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} y^{-2}, & \text{falls } x < y, \\ -x^{-2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes  $y \in (0, 1)$  ist  $f(\cdot, y) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, weil diese Funktion beschränkt ist und ihre Einschränkungen auf  $(0, y)$  und  $[y, 1)$  stetig sind. Es gilt

$$\begin{aligned} g(y) &:= \int_0^1 f(x, y) dx \\ &= \int_0^y y^{-2} dx - \int_y^1 x^{-2} dx \\ &= y^{-1} + x^{-1} \Big|_{x=y}^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Daher ist  $g$  über  $(0, 1)$  Riemann-integrierbar, mit

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 g(y) dy = 1.$$

Indem wir die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauschen und die Gleichheit  $f(x, y) = -f(y, x)$  (für  $x \neq y$ ) verwenden, folgt daraus, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = -1 \neq 1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

Die wiederholten Integrale sind also verschieden. Wir bemerken, dass die Funktion  $f$  nicht Riemann-integrierbar ist, da sie nicht beschränkt ist. Daher widerspricht dieses Beispiel dem Satz [5.10](#) (Fubini) nicht.

**Idee des Beweises des Satzes [5.10](#) (Fubini):** Heuristisch sind  $dx, dy, dz$  die Volumen unendlich kleiner Quader  $S_0, Q_0, R_0$ , wobei  $S_0 = Q_0 \times R_0$ . Daraus folgt intuitiv, dass  $dx = dydz$  und darum, dass

$$\begin{aligned} \int_{Q \times R} f(x) dx &= \sum_{x \in Q \times R} f(x) dx \\ &\stackrel{x=(y,z)}{=} \sum_{z \in R} \sum_{y \in Q} f(y, z) dy dz \\ &= \int_R \int_Q f(y, z) dy dz. \end{aligned}$$

## 5.4 Jordan-Mass

Mit dem eindimensionalen Inhalt einer Kurve meinen wir ihre Länge, mit dem zweidimensionalen Inhalt einer Fläche ihren Flächeninhalt und mit dem dreidimensionalen Inhalt eines dreidimensionalen Körpers sein Volumen. Das Jordan-Mass verallgemeinert diesen Begriff eines Inhalts auf beliebige Dimensionen. Um es zu definieren, benötigen wir das Folgende: Seien  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 5.16.** Wir nennen  $f$  (eigentlich) Riemann-integrierbar (über  $S$ ) g. d. w. es einen Quader  $R$  gibt, sodass  $f = 0$  auf  $S \setminus R$  und die Funktion

$$F : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in S, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.22)$$

(eigentlich) Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von  $f$  (über  $S$ ) als

$$\int_S f(x) dx := \int_R F(x) dx. \quad (5.23)$$

**Bemerkungen.** • Die rechte Seite von (5.23) hängt nicht von der Wahl von  $R$  ab. (Überprüfen Sie das!) Daher ist  $\int_S f(x) dx$  wohldefiniert.

- Falls  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar ist, dann sind  $f$  und  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  beschränkt.
- Für  $S = \mathbb{R}^n$  wird in (DK04b) eine Funktion  $f$  wie in Definition 5.16 Riemann-integrierbar mit kompaktem Träger (Riemann integrable with compact support) genannt.

Für  $c \in \mathbb{R}$  und  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  schreiben wir die Funktion auf  $S$ , die konstant gleich  $c$  ist, als

$$c_S : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad c_S(x) := c.$$

**Definition 5.17** (Jordan-Mass). Eine Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst Jordan-messbar g. d. w.  $1_S$  Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir ihr Jordan-Mass (oder ihren Jordan-Inhalt) als

$$\text{vol}(S) := \text{vol}_n(S) := |S| := \int_S 1 dx$$

(wie in Definition 5.16).

Dieser Begriff ist nach Camille Jordan benannt, siehe Abbildung 5.7.

**Bemerkung.** Jede Jordan-messbare Menge ist beschränkt.

**Beispiel 5.18.** [Quader Jordan-messbar] Jeder Quader in  $\mathbb{R}^n$  ist Jordan-messbar mit Jordan-Mass gleich seinem Volumen. (Siehe Definition 5.1(i).) Das folgt unmittelbar aus der Definition.

**Beispiel 5.19.** [Dreieck Jordan-messbar] Die Menge

$$S := \{x \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x_1 \geq x_2\}$$

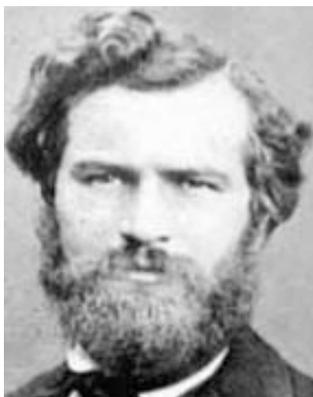


Abbildung 5.7: Camille Jordan, französischer Mathematiker, 1838–1922.

ist Jordan-messbar mit

$$|S| = \frac{1}{2}.$$

Das folgt aus Beispiel [5.5](#).

**Beispiel 5.20.** [nicht-Jordan-messbare Menge] Die Menge  $S := \mathbb{Q}^n \cap [0, 1]^n$  ist beschränkt, aber nicht Jordan-messbar. (Warum?)

**Bemerkung 5.21.** [Riemann-Integral über Jordan-messbare Menge] Eine Riemann-integrierbare Funktion ist Riemann-integrierbar über jede Jordan-messbare Menge: Seien  $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{RI}(S_0)$  Riemann-integrierbar über  $S_0$  und  $S \subseteq S_0$  Jordan-messbar. Dann ist die Einschränkung  $f|_S$  Riemann-integrierbar über  $S$ . Das folgt aus Proposition [5.7\(vii\)](#), der Gleichheit  $f\chi_S = (f\chi_{S_0})\chi_S$  und der Tatsache, dass  $f\chi_{S_0}$  und  $\chi_S$  Riemann-integrierbar sind über jeden Quader  $R$ , der  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  und  $S$  enthält.

**Beispiel 5.22.** [Integral über Jordan-messbare Menge] Der Ball  $\overline{B}^n = \overline{B}_1^n(0)$  ist Jordan-messbar. (Das folgt aus der Tatsache, dass der Rand von  $\overline{B}^n$  eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1 < n$  ist. Siehe [DK04b](#), Theorem 6.3.2, p. 430, Theorem 6.3.8, p. 434.) Da die Funktion

$$f : [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1,$$

stetig ist, ist  $f$  gemäss Proposition [5.7\(iv\)](#) Riemann-integrierbar. Daher folgt aus Bemerkung [5.21](#), dass  $f$  über  $\overline{B}^n$  Riemann-integrierbar ist.

**Frage.** Was ist das Integral?

Antwort:  $\overline{B}^n$  ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der  $(x_2, \dots, x_n)$ -Hyperebene. Des Weiteren ist  $f$  antisymmetrisch bezüglich dieser Spiegelung. Darum verschwindet

das Integral

$$\int_{[-1,1]} x_1 \chi_{\overline{B}^n}(x_1, z) dx_1$$

für jedes  $z = (x_2, \dots, x_n)$ . Gemäss Satz [5.10](#) (Fubini) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}^n} x_1 dx &= \int_{[-1,1]^{n-1}} \int_{[-1,1]} x_1 \chi_{\overline{B}^n}(x_1, z) dx_1 dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 5.5 Substitutionsregel, Integral einer dreh invarianten Funktion, Transformationsatz für das Volumen

Um das Integral einer Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  zu berechnen, ist es manchmal praktisch, andere Koordinaten als die Standardkoordinaten zu verwenden. Die Substitutionsregel für Integrale besagt, dass das Integral einer Funktion berechnet werden kann, indem die Funktion in den neuen Koordinaten ausgedrückt, mit dem Betrag der Jacobi-Determinante [4](#) multipliziert und integriert wird. Wir werden die folgenden Anwendungen der Substitutionsregel behandeln:

- eine Formel für das Integral einer dreh invarianten Funktion zweier Veränderlicher,
- Transformationsatz = eine Formel für das Volumen des Bildes einer Menge unter einem  $C^1$ -Diffeomorphismus.

### Substitutionsregel

Erinnerung an Analysis 1:

**Proposition 5.23** (Substitutionsregel für ein eindimensionales Integral). *Seien  $a \leq b$ ,  $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f : \Psi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt*

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \Psi(y)) \Psi'(y) dy. \quad (5.24)$$

Beweis: [\[Stra\]](#) Satz 6.1.5, S. 122]

**Bemerkung.** Der Beweis beruht auf der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

<sup>4</sup>Das ist die Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation.

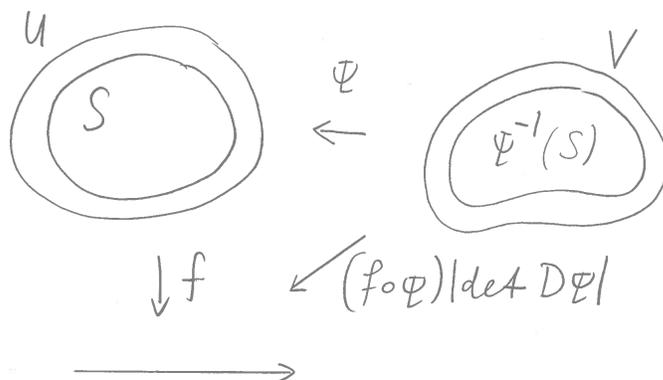


Abbildung 5.8: Die Substitutionsregel.

Diese Formel ist nützlich, um eindimensionale Integrale zu berechnen. Der folgende Satz liefert eine Verallgemeinerung der Formel auf höhere Dimensionen.

**Satz 5.24** (Substitutionsregel für ein mehrdimensionales Integral). *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Psi : V \rightarrow U$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus,  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Teilmenge, sodass  $\bar{S} \subseteq U$  <sup>5</sup>, und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

(i)  $f$  ist Riemann-integrierbar (über  $S$ ) g. d. w.

$$(f \circ \Psi) |\det D\Psi| : \Psi^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.

(ii) In diesem Fall gilt, dass

$$\int_S f(x) dx = \int_{\Psi^{-1}(S)} (f \circ \Psi)(y) |\det D\Psi(y)| dy. \quad (5.25)$$

Beweis: [Stra, Satz 8.5.2, S. 215]

Für die Beweisidee siehe S. 187

Abbildung 5.8 verdeutlicht Satz 5.24.

**Bemerkung.** Satz 5.24 impliziert (5.24), falls  $\Psi$  eine stetig differenzierbare Funktion einer Veränderlichen ist, deren Ableitung überall (strikt) positiv oder negativ ist. Im

<sup>5</sup> $\bar{S}$  bezeichnet den Abschluss von  $S$ , siehe Definition 2.1.

negativen Fall gilt  $\Psi(a) \geq \Psi(b)$  und daher für die linke Seite von (5.24):

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(x) dx &= - \int_{\Psi(b)}^{\Psi(a)} f(x) dx \\ &= - \int_{S:= [\Psi(b), \Psi(a)]} f(x) dx \\ &= - \int_{\Psi^{-1}(S)=[a,b]} (f \circ \Psi)(y) |\det D\Psi(y)| dy \quad (\text{wegen Satz 5.24}) \\ &= \int_a^b (f \circ \Psi)(y) \Psi'(y) dy. \end{aligned}$$

Daher gilt (5.24). Das ist der Grund für den Betrag in (5.25).

**Beispiel 5.25.** [affine Transformation] Wir nehmen an, dass  $\Psi$  affin ist. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\Psi(y) = Ty + v.$$

Wir schreiben

$$S - v := \{x - v \mid x \in S\}$$

für die um  $-v$  verschobene Menge  $S$ . Das Urbild von  $S$  unter  $\Psi$  ist gegeben durch

$$\Psi^{-1}(S) = T^{-1}(S - v).$$

Die Gleichheit (5.25) besagt daher, dass

$$\int_S f(x) dx = |\det T| \int_{T^{-1}(S-v)} f(Ty + v) dy. \quad (5.26)$$

Darum unterscheiden sich das “naive Integral von  $f$  bezüglich  $y$ ” vom Integral  $\int_S f(x) dx$  um den Korrekturfaktor  $|\det T|$ . Wir fixieren jetzt einen Quader  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  und betrachten den Fall, dass  $v = 0$ ,  $S = \Psi(R)$  und  $f = \chi_S$ . Dann besagt (5.26), dass

$$|T(R)| = |\det T| |R|. \quad (5.27)$$

Im Fall  $Ty = cy$  mit  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (zentrische Streckung) folgt das aus der Definition des Volumens. Wir betrachten den Fall  $n = 2$  und

$$T = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$ , siehe Abbildung 5.9

Es gilt, dass  $|T(R)| = |R|$ . Das folgt, indem wir auf der rechten Seite des Parallelogramms  $T(R)$  ein Dreieck abschneiden und dieses auf der linken Seite wieder einfügen. Dadurch erhalten wir wieder das Rechteck  $R$ . (Dabei nehmen wir an, dass  $R$  die Form  $I_1 \times I_2$  besitzt, wobei  $I_1, I_2$  Intervalle sind und  $I_1$  halb-offen ist.) Das beweist (5.27), falls  $T$  durch (5.28) gegeben ist.

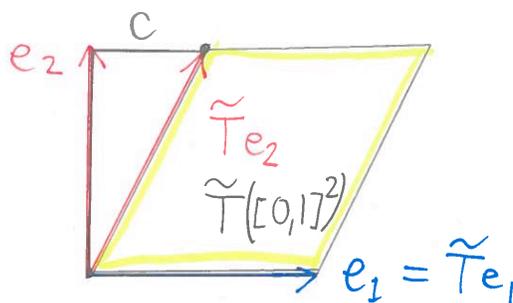


Abbildung 5.9: Die Abbildung  $T$ , eine Scherung.

## Integral einer drehinvarianten Funktion

Als Anwendung des Satzes [5.24](#) erhalten wir eine Formel für das Integral einer drehinvarianten Funktion. Seien  $r_0 > 0$  und  $\tilde{f} : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir definieren

$$f : \overline{B}_{r_0}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \tilde{f}(\|x\|).$$

**Bemerkung.** Wir definieren

$$R := [-r_0, r_0] \times [-r_0, r_0], \quad F : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \overline{B}_{r_0}^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion  $F$  ist Riemann-integrierbar. (Das folgt aus der Tatsache, dass der Rand von  $\overline{B}_{r_0}^2$  eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n-1 < n$  ist. Siehe [\[DK04b\]](#) Theorem 6.3.2, p. 430, Theorem 6.3.8, p. 434.) Gemäss Definition [5.16](#) ist  $f$  daher Riemann-integrierbar und

$$\int_{\overline{B}_{r_0}^2} f(x) dx = \int_R F(x) dx.$$

**Korollar 5.26** (Integral einer drehinvarianten Funktion). *Es gilt, dass*

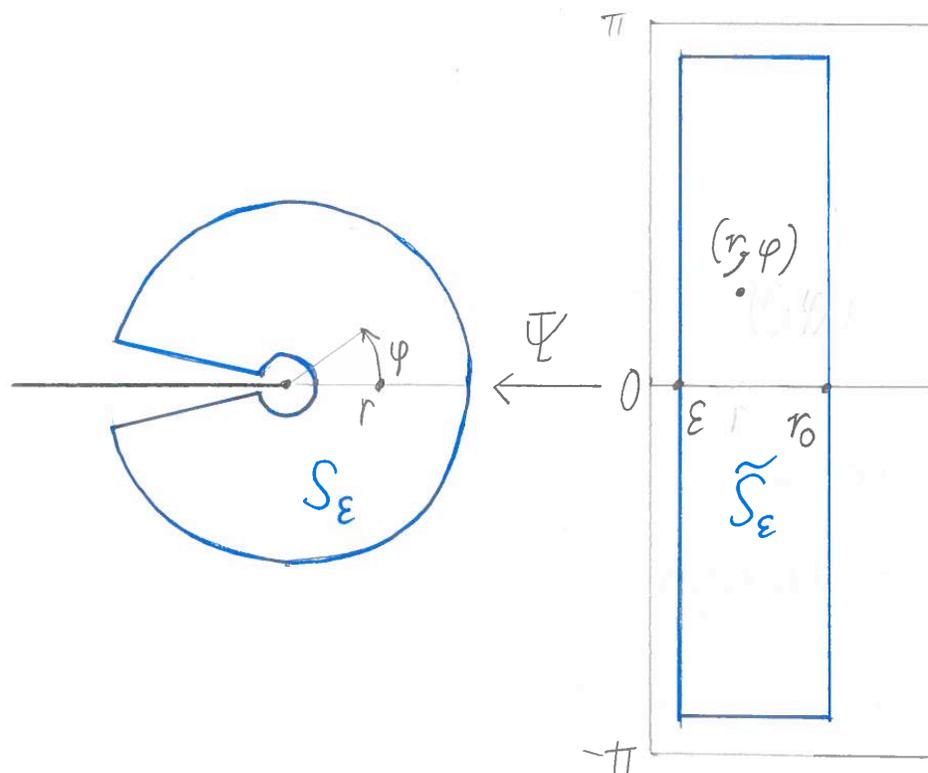
$$\int_{\overline{B}_{r_0}^2} f(x) dx = 2\pi \int_0^{r_0} \tilde{f}(r) r dr. \quad (5.29)$$

**Beweis des Korollars [5.26](#):** Wir definieren

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}), \quad V := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$$

und betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$\Psi : V \rightarrow U, \quad \Psi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Abbildung 5.10: Polarkoordinaten und die Mengen  $\tilde{S}_\varepsilon$  und  $S_\varepsilon$ .

(Siehe Abbildung [5.10](#).) Diese Abbildung ist eine glatte Bijektion. (Überprüfen Sie, dass die Abbildung bijektiv ist!) Gemäss der Formel [\(4.6\)](#) in Beispiel [4.6](#) gilt, dass

$$\det D\Psi(r, \varphi) = r.$$

Gemäss dem Umkehrsatz [4.3](#) ist  $\Psi$  daher ein glatter Diffeomorphismus. Für jedes  $\varepsilon > 0$  schreiben wir

$$\tilde{S}_\varepsilon := [\varepsilon, r_0] \times [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon], \quad S_\varepsilon := \Psi(\tilde{S}_\varepsilon),$$

siehe Abbildung [5.10](#). Die Abbildung  $f\chi_{S_\varepsilon}$  ist Riemann-integrierbar. Gemäss Satz [5.24](#)

(Substitutionsregel) und Satz 5.10 (Fubini) gilt darum, dass

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} f(x) dx &= \int_{\tilde{S}_\varepsilon = \Psi^{-1}(S_\varepsilon)} (f \circ \Psi)(y) |\det D\Psi(y)| dy \\ &= \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_\varepsilon^{r_0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_\varepsilon^{r_0} \tilde{f}(r) r dr d\varphi \\ &= (2\pi - 2\varepsilon) \int_\varepsilon^{r_0} \tilde{f}(r) r dr. \end{aligned}$$

Indem wir den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  nehmen, folgt daraus (5.29). (Überprüfen Sie, dass

$$\int_{S_\varepsilon} f(x) dx \rightarrow \int_{\overline{B}_{r_0}^2} f(x) dx, \quad \text{falls } \varepsilon \rightarrow 0!$$

Das beweist Korollar 5.26.  $\square$

**Beispiel 5.27.** Korollar 5.26 impliziert, dass für jedes  $a \geq 0$  gilt, dass

$$\int_{\overline{B}^2} \|x\|^a dx = 2\pi \int_0^1 r^{a+1} dr = \frac{2\pi}{a+2} r^{a+2} \Big|_{r=0}^1 = \frac{2\pi}{a+2}.$$

Für  $a = 0$  erhalten wir  $\pi$ , den Flächeninhalt von  $\overline{B}^2$ .

**Beispiel 5.28.** [Integral der gaußschen Glockenkurve] Wir betrachten die *gaußsche Glockenkurve*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := e^{-t^2},$$

siehe Abbildung 5.11. Diese Funktion ist *uneigentlich* Riemann-integrierbar, d. h.,  $f$  ist über jedes beschränkte Intervall *eigentlich* Riemann-integrierbar,  $\int_0^{x_+} f(x) dx$  konvergiert für  $x_+ \rightarrow \infty$  und  $\int_{x_-}^0 f(x) dx$  konvergiert für  $x_- \rightarrow -\infty$ . Aus Proposition 5.7(v) folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{x_+ \rightarrow \infty} \int_0^{x_+} f(x) dx + \lim_{x_- \rightarrow -\infty} \int_{x_-}^0 f(x) dx \leq 3.$$

(Siehe Übungsserie 11.)

**Problem:** Berechne  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ .

Um dieses Problem zu lösen, definieren wir

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := e^{-\|x\|^2}.$$

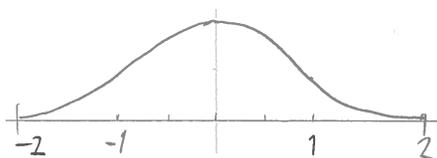


Abbildung 5.11: Gaußsche Glockenkurve.

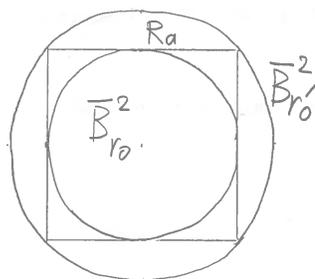


Abbildung 5.12: Die Bälle und Quadrate sind wie abgebildet ineinander enthalten.

Sei  $a > 0$ . Diese Funktion ist stetig und daher gemäss Proposition [5.7\(iv\)](#) über  $R_a := [-a, a]^2$  Riemann-integrierbar. Gemäss Satz [5.10](#) (Fubini) gilt darum, dass

$$\begin{aligned} \int_{R_a} F(x) dx &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-a}^a e^{-x_2^2} \left( \int_{-a}^a e^{-x_1^2} dx_1 \right) dx_2 \\ &= \left( \int_{-a}^a f(t) dt \right)^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sei  $r_0 > 0$ . Gemäss Korollar [5.26](#) gilt, dass

$$\int_{\overline{B}_{r_0}^2} F(x) dx = 2\pi \int_0^{r_0} e^{-r^2} r dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r_0} = -\pi e^{-r_0^2} + \pi. \quad (5.31)$$

Das konvergiert für  $r_0 \rightarrow \infty$  gegen  $\pi$ . Der Ball  $\overline{B}_{r_0}^2$  ist im Quadrat  $R_{a=r_0}$  enthalten. Des Weiteren ist das Quadrat  $R_a$  im Ball  $\overline{B}_{r_0=\sqrt{2}a}^2$  enthalten, siehe Abbildung [5.12](#). Daraus folgt, dass  $\int_{R_a} F(x) dx$  für  $a \rightarrow \infty$  gegen denselben Grenzwert wie [\(5.31\)](#) konvergiert.

(Überlegen Sie sich das!) Indem wir das mit (5.30) kombinieren, folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(t) dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{R_a} F(x) dx} \quad (\text{wegen (5.30)}) \\
 &= \sqrt{\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{R_a} F(x) dx} \\
 &= \sqrt{\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}_{r_0}^2} F(x) dx} \\
 &= \sqrt{\pi} \quad (\text{wegen (5.31)}).
 \end{aligned}$$

Das löst das obige Problem.

**Bemerkungen.** (i) Die gaußsche Glockenkurve spielt eine wichtige Rolle in der Stochastik, wo sie als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung auftritt.

(ii) Es gibt keine “Formel” für die Funktion  $F(a) := \int_{-\infty}^a e^{-t^2} dt$ . Dennoch waren wir im Stande, das Integral über ganz  $\mathbb{R}$  zu berechnen. Das ist ein eindimensionales Integral, aber in unserer Berechnung haben wir ein zweidimensionales Integral verwendet. Das zeigt, dass mehrdimensionale Integration auch für die Berechnung gewisser eindimensionaler Integrale nützlich ist.

## Transformationssatz für das Volumen

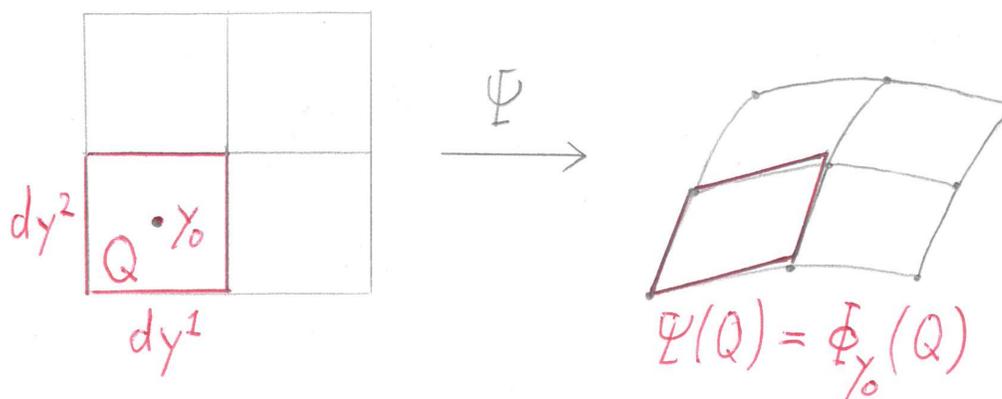
Als Anwendung des Satzes (5.24) (Substitutionsregel) erhalten wir das folgende Korollar.

**Korollar 5.29** (Transformationssatz für das Volumen). *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Psi : V \rightarrow U$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $A$  eine Jordan-messbare Menge, sodass  $\overline{A} \subseteq V$ . Dann ist  $\Psi(A)$  Jordan-messbar mit*

$$|\Psi(A)| = \int_A |\det(D\Psi(y))| dy. \quad (5.32)$$

**Beweis:** Jordan-Messbarkeit: [Stra, Satz 8.5.1, p. 212]

Die Formel (5.32) folgt aus Satz (5.24)(ii) mit  $S := \Psi(A)$  und  $f \equiv 1$ .  $\square$

Abbildung 5.13: Wirkung von  $\Psi$  auf den infinitesimalen Quader  $Q$ .

### Beweisidee für die Substitutionsregel

Die Idee des Beweises des Satzes [5.24](#) ist die folgende. Sei  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein affiner Isomorphismus, d. h., es gibt einen linearen Isomorphismus<sup>6</sup>  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\Phi(x) = T(x) + v$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader. Mittels eines Arguments wie in Beispiel [5.25](#) und linearer Algebra folgt, dass

$$|\Phi(R)| = |\det T| |R|. \quad (5.33)$$

Sei jetzt  $\Psi$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren

$$\Phi_{y_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_{y_0}(y) := D\Psi(y_0)(y - y_0) + \Psi(y_0). \quad (5.34)$$

Das ist die beste affine Näherung von  $\Psi$  um  $y_0$ . (Vergleiche mit [\(3.10\)](#).) Heuristisch bildet  $\Psi$  einen infinitesimalen<sup>7</sup> Quader  $Q$  mit Mittelpunkt  $y_0$  auf das infinitesimale Parallelepiped  $\Psi(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$  ab, siehe Abbildung [5.13](#). Wir schreiben  $dy, dx$  für die Volumen von  $Q, \Psi(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$ . (Falls wir  $dy^i$  für die Länge der  $i$ -ten Seite von  $Q$  schreiben, dann gilt, dass  $dy = dy^1 \cdots dy^n$ .) Gemäss [\(5.34\)](#) [\(5.33\)](#) gilt heuristisch

$$dx = |\Phi_{y_0}(Q)| = |\det D\Psi(y_0)| dy.$$

Heuristisch folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int f dx &= \sum_{x_0} f(x_0) dx \\ &= \sum_{y_0} f(\Psi(y_0)) |\det D\Psi(y_0)| dy \quad (x_0 = \Psi(y_0)) \\ &= \int (f \circ \Psi) |\det D\Psi| dy, \end{aligned}$$

also die im Satz [5.24](#) (Substitutionsregel) behauptete Gleichheit [\(5.25\)](#).

<sup>6</sup>d. h. eine bijektive lineare Abbildung

<sup>7</sup>d. h. "unendlich kleinen"



# Kapitel 6

## Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauß

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung  $X$  von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ . In der Physik spielt  $X$  die Rolle einer vektorwertigen Grösse, zum Beispiel des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer Flüssigkeit oder des elektrischen Feldes. Die Sätze von Green, Stokes und Gauß besagen, dass das Integral einer gewissen Art von Ableitung eines Vektorfeldes über ein Gebiet gleich einer Art Integral des Vektorfeldes über den Rand des Gebietes ist. Im Fall von Green ist das Gebiet eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , für Stokes ist es eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , und für Gauß ist es eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

Die drei Sätze (Green, Stokes und Gauß) spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Sie werden in der Strömungslehre und Elektrodynamik angewendet. Der Satz von Stokes wird zum Beispiel verwendet, um das faradaysche Induktionsgesetz aus einer der vier Maxwellgleichungen herzuleiten. Der Satz von Gauß wird verwendet, um das gaußsche Gesetz der Elektrostatik aus einer anderen Maxwellgleichung herzuleiten. (Siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.)

Die drei Sätze verallgemeinern den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser besagt, dass das Integral der Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion einer reellen Veränderlichen gleich dem Unterschied der Werte der Funktion in den Endpunkten des Intervalls ist.

Der Satz von Green ist der Spezialfall des Satzes von Stokes, in dem die Fläche eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist.

### 6.1 Kurvenintegral, Orientierung, $C^k$ -Gebiet

Der Satz von Green besagt, dass das Integral der Rotation eines Vektorfeldes über ein  $C^1$ -Gebiet in der Ebene gleich dem Kurvenintegral des Vektorfeldes über den positiv

orientierten Rand des Gebietes ist. In diesem Abschnitt definieren wir diese Begriffe. Die Definition des Kurvenintegrals beruht auf der folgenden Definition und Proposition. Seien  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Definition.** Eine (eingebettete)  $C^k$ -Kurve in  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension 1.

Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte<sup>1</sup>  $C^1$ -Kurve.

**Lemma 6.1** (Kurvenintegral einer Funktion). *Es gilt:*

- (i) *Es gibt ein  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und für jedes  $j = 1, \dots, \ell$  ein kompaktes Intervall  $I_j$  positiver Länge und eine Immersion  $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$ , sodass*

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} x_j(I_j) = C$$

und so, dass die Abbildung

$$\bigcup_j \{j\} \times \text{Int } I_j \ni (j, t) \mapsto x_j(t) \in C$$

injektiv ist. (Dabei bezeichnet  $\text{Int } I_j$  das Innere von  $I_j$ , siehe Definition [2.16](#).)

Seien jetzt  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\ell$  und  $(I_j, x_j)_{j=1, \dots, \ell}$  wie in [\(i\)](#). Wir definieren

$$I(f, (I_j, x_j)_j) := \sum_{j=1}^{\ell} \int_{I_j} f \circ x_j(t) \|\dot{x}_j(t)\| dt. \quad (6.1)$$

- (ii) *Die Zahl  $I(f, (I_j, x_j)_j)$  hängt nicht von  $(I_j, x_j)_j$  ab.*

**Bemerkung.** Die Ableitung von  $x_j$  ist auf dem ganzen Intervall  $I_j$  definiert, auch in den Randpunkten. Daher ergibt die Bedingung, dass  $x_j$  eine Immersion ist, Sinn.

Beweis des Lemmas [6.1](#): [\(i\)](#) folgt aus der Klassifikation der eindimensionalen  $C^k$ -Untermannigfaltigkeiten, welche besagt, dass jede weg-zusammenhängende eindimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$   $C^k$ -diffeomorph<sup>2</sup> zur Geraden  $\mathbb{R}$  oder zum Kreis  $S^1$  ist.

<sup>1</sup>Gemäss Satz [2.27](#) bedeutet das, dass  $C$  abgeschlossen und beschränkt ist.

<sup>2</sup>Zwei Untermannigfaltigkeiten heissen  $C^k$ -diffeomorph, falls es einen  $C^k$ -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt, d. h. eine bijektive  $C^k$ -Abbildung deren Umkehrung ebenfalls  $C^k$  ist.

(ii) folgt aus der Tatsache, dass der Ausdruck  $I(f, (I_j, x_j)_j)$  gleich dem Integral über die Untermannigfaltigkeit  $C$  ist. Siehe Definition 6.26 und Korollar 6.29.

**Definition 6.2** (Kurvenintegral einer Funktion). Wir definieren das (Kurven-)Integral von  $f$  über  $C$  als

$$\int_C f ds := I(f, (I_j, x_j)_j), \tag{6.2}$$

wobei  $(I_j, x_j)_j$  wie in Lemma 6.1(i) ist und  $I(f, (I_j, x_j)_j)$  durch (6.1) gegeben ist.

**Bemerkungen.** [Kurvenintegral]

- Wir können das Kurvenintegral wie folgt heuristisch interpretieren. Sei  $t_0 \in I_j$ . Wir definieren

$$\Psi_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi_{t_0}(t) := \dot{x}_j(t_0)(t - t_0) + x_j(t_0).$$

Das ist die beste affine Näherung von  $x_j$  um  $t_0$ . (Vergleiche mit (3.10).) Für jedes Intervall  $J$  gilt:

$$\text{Länge von } \Psi_{t_0}(J) = \|\dot{x}_j(t_0)\| |J|. \tag{6.3}$$

Heuristisch bildet  $x_j$  ein infinitesimales<sup>3</sup> Intervall  $J$  mit Mittelpunkt  $t_0$  auf die infinitesimale Strecke  $x_j(J) = \Psi_{t_0}(J)$  ab. Wir schreiben  $dt, ds$  für die Längen von  $J, x_j(J) = \Psi_{t_0}(J)$ .

Heuristisch ist  $ds$  die Länge des Bildes unter  $x_j$  eines infinitesimalen Zeitintervalls der Länge  $dt$ . Gemäss (6.3) gilt

$$ds = \|\dot{x}_j(t_0)\| dt, \tag{6.4}$$

siehe Abbildung 6.1

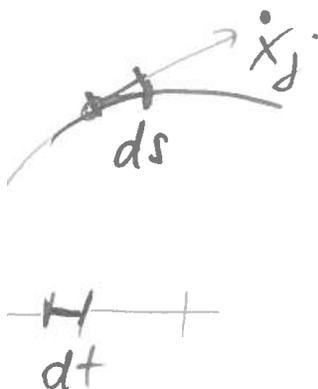
Das Kurvenintegral von  $f$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \sum_j \int f \circ x_j \|\dot{x}_j\| dt && \text{(gemäss der Definition (6.2))} \\ &= \sum_j \sum_{t_0} f(x_j(t_0)) \|\dot{x}_j(t_0)\| dt && \text{(heuristisch)} \\ &= \sum_{x_0 \in C} f(x_0) ds && \text{(heuristisch gemäss (6.4) mit } x_0 = x_j(t_0)), \end{aligned}$$

und das ist intuitiv gleich dem Flächeninhalt (mit Vorzeichen) der Fläche, die durch  $C \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und den Graphen von  $f$  aufgespannt wird.

---

<sup>3</sup>d. h. "unendlich kleines"

Abbildung 6.1: Die infinitesimale Bogenlänge  $ds$ .

- Für  $f \equiv 1$  nennen wir

$$\ell(C) := \int_C 1 ds$$

die (*Bogen-*)Länge von  $C$ . Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass die Bogenlänge die Summe der Längen der “infinitesimalen Bögen” ist, woraus  $C$  besteht.

**Beispiel 6.3.** [Kurvenintegral einer Funktion] Wir betrachten

$$C := S^1, \quad f \in C(S^1, \mathbb{R}).$$

Es gilt

$$\int_{S^1} f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt.$$

Um das zu sehen, definieren wir

$$k = 1, \quad I_1 := [0, 2\pi], \quad x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x_1(t) := (\cos t, \sin t).$$

Es gilt, dass

$$\dot{x}_1 = (-\sin t, \cos t), \quad \|\dot{x}_1\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Insbesondere erhalten wir für die Bogenlänge des Einheitskreises

$$\ell(S^1) = \int_{S^1} 1 ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ein anderes Beispiel ist <sup>4</sup>

$$\int_{S^1} x^1 ds = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Das folgt auch aus einem Symmetrie-Argument. (Wie?)

<sup>4</sup>Hier bezeichnet  $x^1$  die erste Koordinate von  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Kurve.

**Definition 6.4** (Einheitstangentialvektorfeld). *Ein Einheitstangentialvektorfeld längs  $C$  (oder eine Orientierung von  $C$ ) ist eine stetige Abbildung  $T : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass*

$$T(x) \in T_x C, \|T(x)\| = 1, \quad \forall x \in C.$$

**Beispiel 6.5.** [Orientierungen des Kreises] Die Abbildungen

$$T : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x) := (-x^2, x^1),$$

und  $-T$  sind Orientierungen des Kreises.

**Bemerkung.** Falls  $C$  eine wegzusammenhängende  $C^1$ -Kurve ist, dann gibt es genau zwei Orientierungen auf  $C$  ( $T$  und  $-T$ ). Grund: Falls  $T$  und  $\tilde{T}$  Orientierungen sind, dann gilt  $T \cdot \tilde{T} : C \rightarrow \{\pm 1\}$ . Diese Abbildung ist stetig. Da  $C$  wegzusammenhängend ist, folgt daraus, dass das Bild von  $T \cdot \tilde{T}$  wegzusammenhängend ist. Daraus folgt, dass  $T \cdot \tilde{T} \equiv 1$  oder  $-1$  und darum, dass  $T \equiv \tilde{T}$  oder  $T \equiv -\tilde{T}$ .

Sei  $T$  eine Orientierung von  $C$ . Ein stetiges Vektorfeld längs  $C$  ist eine stetige Abbildung  $X : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $X$  ein solches Vektorfeld. Wir bezeichnen mit

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^n v^i w^i$$

das Standardskalarprodukt zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 6.6** (Kurvenintegral eines Vektorfeldes). *Wir nehmen an, dass  $C$  kompakt ist. Wir definieren das (Kurven)-Integral (oder das Ringintegral oder die Zirkulation) von  $X$  über  $C$  bezüglich  $T$  als*

$$\int_{C,T} X \cdot ds := \int_C X \cdot T ds, \tag{6.5}$$

wobei die rechte Seite das Kurvenintegral der Funktion  $X \cdot T : C \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet. (Siehe Definition [6.2](#).)

**Bemerkungen.** • Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0, I_1, \dots, I_\ell$  kompakte Intervalle und  $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$  Wege wie in Definition [6.2](#), sodass

$$\frac{\dot{x}_j}{\|\dot{x}_j\|} = T \circ x_j, \quad \forall j.$$

Es gilt

$$\int_{C,T} X \cdot ds = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{I_j} (X \circ x_j(t)) \cdot \dot{x}_j(t) dt. \tag{6.6}$$

Das folgt aus [\(6.5\)](#), [\(6.2\)](#), [\(6.1\)](#).

- Heuristisch gilt, dass

$$ds = T ds.$$

Das ist eine "infinitesimaler Vektor". Der Ausdruck  $X \cdot ds$  ist das Skalarprodukt von  $X$  mit diesem Vektor. Heuristisch können wir das Kurvenintegral von  $X$  daher als die Summe aller dieser Skalarprodukte auffassen,

$$\int_{C,T} X \cdot ds = \sum_x X(x) \cdot ds.$$

- Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ ,  $I$  ein kompaktes Intervall und  $\gamma$  ein  $C^1$ -Weg auf  $I$  in  $U$ , d. h. eine  $C^1$ -Abbildung  $\gamma : I \rightarrow U$ . In Definition [3.28](#) haben wir das *Wegintegral von  $X$  längs  $\gamma$*  definiert als

$$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Das stimmt mit der Formel [\(6.6\)](#) für das Kurvenintegral wie in Definition [6.6](#) überein, falls  $C$  mittels eines einzigen Weges  $\gamma = x_1$  parametrisiert wird.

**Beispiel 6.7.** [Kurvenintegral eines Vektorfeldes] Wir betrachten

$$C := S^1, \quad X \in C(S^1, \mathbb{R}^2),$$

und  $T$  wie in Beispiel [6.5](#), d. h.

$$T(x) := (-x^2, x^1).$$

Es gilt

$$\int_{S^1, T} X \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt.$$

Das folgt aus [\(6.6\)](#) mit

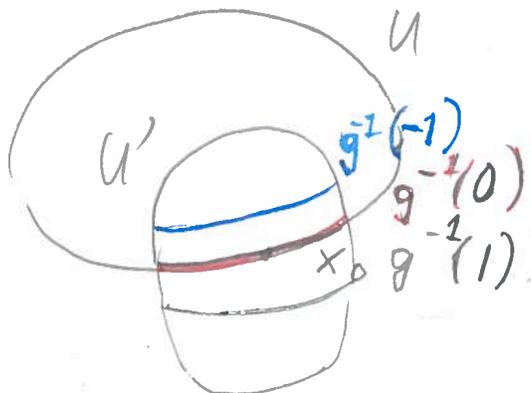
$$x_1 : I_1 := [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x_1(t) := (\cos t, \sin t).$$

Insbesondere erhalten wir für  $X(x) := (-x^2, x^1)$  dass

$$\int_{S^1, T} X(x) \cdot ds = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + \cos^2 t) dt = 2\pi,$$

und für  $X(x) \equiv e_1$  dass

$$\int_{S^1, T} X(x) \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t) dt = \cos t \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Abbildung 6.2: Ein  $C^k$ -Gebiet.

Um den Satz von Green zu formulieren, benötigen wir das Folgende. Seien  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Definition 6.8** ( $C^k$ -Gebiet). *Ein ( $n$ -dimensionales)  $C^k$ -Gebiet ist eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , sodass es für jeden Punkt  $x_0 \in \partial U$  eine offene Umgebung  $U'$  von  $x_0$  und eine  $C^k$ -Submersion  $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass*

$$g(x_0) = 0, \quad U \cap U' = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < 0\}. \quad (6.7)$$

Abbildung [6.2](#) verdeutlicht diese Definition.

**Bemerkung.** • Seien  $U'$  und  $g$  wie oben. Es gilt, dass

$$\partial U \cap U' = g^{-1}(0), \quad (6.8)$$

und das ist eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$ . Das folgt aus dem *Submersionssatz*, der besagt, dass  $g$  lokal in geeigneten Koordinaten durch die Projektion auf die letzte Koordinate gegeben ist. (Siehe [DK04a](#) Theorem 4.5.2, p. 121].)

- In [DK04b](#), Definition 7.5.2, S. 515] wird definiert, was es bedeutet, dass eine offene Teilmenge  $\Omega$  “auf einer Seite ihres Randes liegt”. Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass  $\Omega$  ein  $C^k$ -Gebiet ist.

**Beispiel 6.9.** Jeder offene Ball in  $\mathbb{R}^n$  ist ein  $C^\infty$ -Gebiet.

**Beispiel 6.10.** Die offene Menge  $U := \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$  ist kein  $C^1$ -Gebiet. Das Problem ist, dass  $U$  auf beiden Seiten seines Randes  $\partial U = \{0\} \times \mathbb{R}$  liegt.

Eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$  heisst *positiv* g. d. w.

$$\det(v_1 \cdots v_n) > 0.$$

Wir betrachten den Fall  $n = 2$ .

**Definition 6.11** (positive Orientierung). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein  $C^1$ -Gebiet. Wir definieren die positive Orientierung von  $\partial U$  (bezüglich  $U$ ),

$$T : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

wie folgt. Seien  $x_0 \in \partial U$  und  $U'$ ,  $g$  wie in Definition 6.8. Wir definieren  $T(x_0) \in T_{x_0} \partial U$  als den eindeutigen Vektor der Länge 1, sodass das (geordnete) Paar  $(\nabla g(x_0), T(x_0))$  eine positive Basis von  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Bemerkung.** •  $\nabla g = (D_1 g, D_2 g) = \text{Gradient von } g$ .

- Die Bedingung bedeutet, dass  $U$  “links von  $T(x)$  liegt”.
- Sie hängt nicht von der Wahl von  $g$  ab.

**Beispiel.** Für den Ball  $U = B^2$  ist die positive Orientierung des Randes gegeben durch

$$T(x) = (-x^2, x^1).$$

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein  $C^1$ -Gebiet. Mit einem  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\bar{U}$  meinen wir eine Abbildung  $X \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^2)$  (wie in Definition 4.44). Sei  $X$  ein solches Vektorfeld. Wir definieren die (skalare) Rotation von  $X$  wie in Definition 3.46(i), d. h.

$$\text{rot } X := D_1 X^2 - D_2 X^1 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^5$$

**Bemerkung.** Weil  $U$  ein  $C^1$ -Gebiet ist, ist  $DX$  (und daher  $\text{rot } X$ ) wohldefiniert und stetig auf  $\bar{U}$ , nicht nur auf  $U$ .

## 6.2 Satz von Green

Wir bezeichnen mit  $\cdot$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Das erste Hauptresultat dieses Kapitels ist der folgende Satz.

**Satz 6.12** (Green). Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet und  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\bar{U}$ . Dann ist das Integral der Rotation von  $X$  über  $U$  gleich dem Integral von  $X$  über den Rand von  $U$ , d. h.

$$\int_U \text{rot } X \, dx = \int_{\partial U, T} X \cdot ds = \int_{\partial U} X \cdot T \, ds, \quad (6.9)$$

wobei  $T$  die positive Orientierung von  $\partial U$  ist.

<sup>5</sup> $\bar{U}$  bezeichnet den Abschluss von  $U$ , siehe Definition 2.1



Abbildung 6.3: George Green, britischer Mathematiker und Physiker, 1793–1841.

Beweis: S. [226] oder [Stra, Satz 8.4.1, S. 207] oder [DK04b, Theorem 8.3.5, p. 554]

Der Beweis des Satz beruht auf dem Satz von Gauß (Satz [6.44]). Der Satz ist nach George Green benannt, siehe Abbildung [6.3]

- Bemerkungen.**
- Die Funktion  $\operatorname{rot} X$  ist eigentlich Riemann-integrierbar über  $U$ , d. h., die linke Seite von [6.9] ist wohldefiniert.
  - Da  $U$  beschränkt ist, ist  $\partial U$  kompakt. Darum ist die rechte Seite von [6.9] wohldefiniert.
  - Der Satz von Green ist eine einfache Version des Satzes von Stokes, in dem eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  vorkommt. (Siehe Abschnitt [6.6]) Das ist die Hauptmotivation für den Satz von Green.

**Beispiel 6.13.** [Flächeninhalt und Satz von Green] Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet und

$$X : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ein  $C^1$ -Vektorfeld, sodass  $\operatorname{rot} X \equiv 1$ . Gemäss Satz [6.12] (Green) gilt, dass

$$|U| = \int_{\partial U, T} X \cdot ds.$$

Das liefert eine Methode, um den Flächeninhalt von  $U$  zu berechnen. Wir betrachten zum Beispiel

$$U := B^2, \quad X(x) := \frac{1}{2}(-x^2, x^1).$$

Dann gilt  $\operatorname{rot} X \equiv 1$ . Wir betrachten die Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad x(t) := (\cos t, \sin t).$$

Wir bezeichnen mit  $T$  die positive Orientierung von  $S^1$  als Rand von  $B^2 = B_1^2(0)$ . (Siehe Beispiel [6.1](#).) Gemäss Satz [6.12](#) gilt

$$\begin{aligned}
 |B^2| &= \int_{B^2} \operatorname{rot} X \, dx \\
 &= \int_{S^1, T} X \cdot ds \\
 &= \int_0^{2\pi} X \circ x(t) \cdot \dot{x}(t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + \cos^2 t) \, dt \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

(Vergleichen Sie das mit einer Aufgabe in Übungsserie 10 (Volumen des Einheitsballes) und Beispiel [5.27](#).)

**Bemerkungen.** [Rotation = Zirkulation pro eingeschlossene Fläche]

- Mittels des Satzes von Green können wir die Rotation eines Vektorfeldes als die *Zirkulation des Vektorfeldes pro eingeschlossenen Flächeninhalt* auffassen. Sei nämlich  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge,  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $U_0$  und  $x_0 \in U_0$ . Sei  $r \in (0, \infty)$ , sodass der Ball  $U_r := B_r^2(x_0)$  in  $U_0$  enthalten ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot ds &= \frac{1}{|U_r|} \int_{U_r} \operatorname{rot} X \, dx && \text{(gemäss Satz [6.12](#) Green)} \\
 &\rightarrow \operatorname{rot} X(x_0) && \text{für } r \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Der Grund für diese Konvergenz ist, dass die Werte von  $X$  im Ball  $U_r$  “immer weniger von  $X(x_0)$  abweichen”, wenn  $r > 0$  kleiner wird. Das Integral  $\int_{\partial U_r} X \cdot ds$  ist die Zirkulation von  $X$  längs der Kurve  $C_r := \partial U_r = S_r^1(x_0)$ .  $|U_r|$  ist der Inhalt der durch  $C_r$  eingeschlossenen Fläche  $U_r$ . Wir können daher den Grenzwert

$$\operatorname{rot} X(x_0) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot ds$$

als die *Zirkulation von  $X$  pro eingeschlossenen Flächeninhalt im Punkt  $x_0$*  interpretieren, wie behauptet.

- Wir können in dieser Interpretation anstelle von  $U_r$  ein allgemeines  $C^1$ -Gebiet  $U$  zulassen, falls wir den Grenzwert für  $r \rightarrow 0$  durch einen “Grenzwert für  $U \rightarrow \{x_0\}$ ” ersetzen. Dazu müssen wir zuerst den Begriff eines “Grenzwertes für  $U \rightarrow \{x_0\}$ ” definieren.

## 6.3 Untermannigfaltigkeit mit Rand und Koorientierung einer Hyperfläche

Der Satz von Stokes verallgemeinert den Satz von Green, indem das  $C^1$ -Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  durch eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  mit Rand ersetzt wird. Er besagt, dass der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  gleich dem Integral des Vektorfeldes längs des Randes der Fläche ist. Eine Fläche mit Rand ist ein Spezialfall einer Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dieser Begriff ist wie folgt definiert. Seien  $d, n \in \mathbb{N}_0$  so, dass  $d \leq n$ , und seien  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definition 6.14** (Parametrisierung, Untermannigfaltigkeit mit Rand). *Eine lokale innere  $C^k$ -Parametrisierung von  $M$  (der Dimension  $d$ ) ist ein Paar  $(V, \psi)$ , wobei  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene Teilmenge und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Einbettung ist, sodass es eine offene Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\psi(V) = M \cap U$  gibt. Eine lokale  $C^k$ -Randparametrisierung von  $M$  ist ein Paar  $(V, \psi)$ , wobei*

$$V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^d := \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty)$$

*eine (relativ) offene Teilmenge ist und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Einbettung ist, sodass es eine offene Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\psi(V) = M \cap U$  gibt. Eine lokale  $C^k$ -Parametrisierung von  $M$  ist eine lokale innere oder Randparametrisierung von  $M$  der Klasse  $C^k$ .*

*Wir nennen  $M$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  mit Rand g. d. w. es für jeden Punkt  $x_0 \in M$  eine lokale  $C^k$ -Parametrisierung  $(V, \psi)$  mit  $x_0 \in \psi(V)$  gibt. Sei  $M$  eine solche Untermannigfaltigkeit. Wir definieren den intrinsischen Rand von  $M$  als die Menge*

$$\partial M := \bigcup \{ \psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})) \mid (V, \psi) \text{ lokale } C^k \text{ Randparametrisierung von } M \}.$$

**Bemerkungen.** [Untermannigfaltigkeit mit Rand]

- (i) Erinnerung an Definition 2.28: Seien  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq S$ .  $V$  heisst (relativ) offen in  $S$  g. d. w. es eine offene Teilmenge  $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$  gibt, sodass  $V = S \cap \widetilde{V}$ . Wenn also  $(V, \psi)$  eine Randparametrisierung ist, dann kann  $V$  den Rand  $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$  von  $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$  schneiden. In diesem Fall ist  $V$  nicht offen in  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii) Eine  $C^k$ -Einbettung  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine injektive  $C^k$ -Immersion, die eine stetige Umkehrung besitzt. Im "Randfall"  $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  ist  $D\psi$  auf ganz  $V$  definiert (einschliesslich  $V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$ ). Daher ist es sinnvoll zu verlangen, dass  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine "Immersion" ist.

Sei jetzt  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  mit Rand.

- (iii) Der intrinsische Rand von  $M$  ist wohldefiniert, d. h., er hängt nicht von  $k$  ab. ( $k$  tritt in  $C^k$  auf.)
- (iv) Falls  $(V, \psi)$  und  $(V', \psi')$  lokale  $C^k$ -Randparametrisierungen von  $M$  sind, dann gilt

$$\psi'^{-1}\left(\psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}))\right) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\},$$

d. h., falls ein Punkt  $x_0 \in M$  ein Randpunkt bezüglich einer lokalen  $C^k$ -Randparametrisierung  $(\psi, V)$  ist, dann gilt dasselbe bezüglich aller anderen lokalen  $C^k$ -Randparametrisierungen, deren Bild  $x_0$  enthält.

- (v) Falls  $M$  (in  $\mathbb{R}^n$ ) abgeschlossen ist und  $d < n$ , dann ist das Innere von  $M$  leer und daher der *topologische Rand* von  $M$  gleich  $M$ . Der topologische Rand und der intrinsische Rand von  $M$  unterscheiden sich daher. Aus dem Kontext wird jeweils deutlich werden, um welche Art Rand es geht.
- (vi) Die Dimension  $d$  von  $M$  ist eindeutig, d. h., falls  $M$  eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  mit Rand der Dimension  $d$  und der Dimension  $d'$  ist, dann ist  $d = d'$ . Das folgt aus derselben Aussage für eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand. (Siehe Proposition [4.15](#).)
- (vii) Falls  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$  ist, dann ist  $(V, \psi)$  eine innere Parametrisierung g. d. w. es eine Randparametrisierung ist. Das Bild  $\psi(V)$  braucht den intrinsischen Rand von  $M$  daher nicht zu schneiden, falls  $\psi$  eine Randparametrisierung ist.
- (viii) Wir wählen einen glatten Diffeomorphismus  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (zum Beispiel  $f := \log$ ) und definieren

$$\chi : \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, \quad \chi(z, t) := (z, f(t)).$$

Falls  $(V, \psi)$  eine innere Parametrisierung für  $M$  ist, dann ist  $(\chi^{-1}(V), \psi \circ \chi)$  eine Randparametrisierung für  $M$ . Daraus folgt, dass eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist g. d. w. es *Rand*-Parametrisierungen gibt, deren Bilder  $M$  überdecken.

**Beispiel.** [Untermannigfaltigkeit mit Rand] Jede  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $d$  ist eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $d$  mit Rand. Das folgt aus Satz [4.26](#) (Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten). In diesem Fall ist der intrinsische Rand leer.

Andere Beispiele von Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind global parametrisierbare Untermannigfaltigkeiten: Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge.

**Definition 6.15** (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit). *Eine (globale)  $C^k$ -Parametrisierung von  $M$  ist ein Paar  $(V, \psi)$ , wobei  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  ein beschränktes offenes  $C^k$ -Gebiet ist und  $\psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Einbettung mit Bild  $M$  ist. Wir nennen  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte (global) parametrisierbare  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  mit Rand g. d. w. es eine globale  $C^k$ -Parametrisierung von  $M$  gibt.*

**Bemerkung 6.16.** [parametrisierbare Untermannigfaltigkeit] Jede kompakte parametrisierbare  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit  $M$  mit Rand ist eine  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit intrinsischem Rand

$$\partial M = \psi(\partial V),$$

wobei  $(V, \psi)$  eine  $C^k$ -Parametrisierung von  $M$  ist und  $\partial V$  der topologische Rand von  $V$  ist.

**Beispiel.** [Hemisphäre] Die abgeschlossene Hemisphäre

$$M := \{x \in S^{n-1} \mid x^n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist eine glatte parametrisierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$  mit intrinsischem Rand gegeben durch den Äquator

$$\partial M = S^{n-2} \times \{0\}.^6$$

Um das einzusehen, definieren wir  $V := B^{n-1}$  und  $\psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  als die Einschränkung der Umkehrung der stereographischen Projektion durch den Südpol auf den abgeschlossenen Einheitsball. (Siehe Übungsserie 9.)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  mit Rand. Für jedes  $x \in M$  definieren wir den Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $x$  als

$$T_x M := D\psi(\psi^{-1}(x))(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei  $(V, \psi)$  eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung von  $M$  ist, sodass  $x \in \psi(V)$ .

**Bemerkung.** Im Fall  $x \in M \setminus \partial M$  stimmt das gemäss Satz 4.37 (Charakterisierung des Tangentialraumes) mit unserer früheren Definition des Tangentialraumes überein.

Für jeden Untervektorraum  $W$  von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

das orthogonale Komplement von  $W$  bezüglich des Standardskalarprodukts. Wir nehmen jetzt an, dass  $\dim M = d = n - 1$ .

<sup>6</sup> $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  ist die Einheitsphäre.

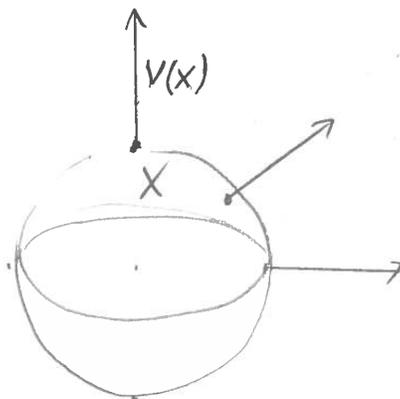


Abbildung 6.4: Koorientierung der Sphäre.

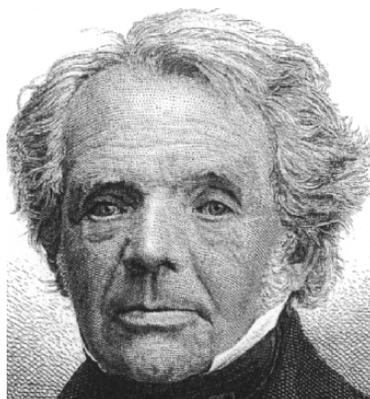


Abbildung 6.5: August Ferdinand Möbius, deutscher Mathematiker, 1790–1868.

**Definition 6.17** (Einheitsnormalvektorfeld). *Eine Koorientierung von  $M$  (oder ein Einheitsnormalvektorfeld auf  $M$ ) ist eine Abbildung  $\nu \in C(M, \mathbb{R}^n)$ , sodass*

$$\nu(x) \in T_x M^\perp, \quad \|\nu(x)\| = 1, \quad \forall x \in M. \quad (6.10)$$

**Bemerkung.** Manchmal wird ein solches  $\nu$  auch eine *Orientierung von  $M$*  genannt.

**Beispiel 6.18.** [Koorientierungen der Sphäre] Die Abbildungen

$$\nu : M := S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nu(x) := x$$

und  $-\nu$  sind Koorientierungen, siehe Abbildung [6.4](#)

**Beispiel 6.19.** [Möbiusband] Das Möbiusband  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  ist nicht koorientierbar, d. h., es gibt keine Koorientierung auf  $M$ . Abbildung [6.6](#) verdeutlicht das.

Das Möbiusband ist nach August Ferdinand Möbius benannt, siehe Abbildung [6.5](#).

**Bemerkungen.** • Eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$  mit Rand heisst ein *Hyperfläche*.

- Jede kompakte (global) parametrisierbare  $C^1$ -Hyperfläche  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist koorientierbar. Sei nämlich  $\psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Parametrisierung von  $M$ . Wir definieren die Koorientierung  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , indem wir fordern, dass  $\nu(x) \in T_x M^\perp$  der eindeutige Vektor der Länge 1 ist, sodass

$$D_1\psi(\psi^{-1}(x)), \dots, D_{n-1}\psi(\psi^{-1}(x)), \nu(x)$$

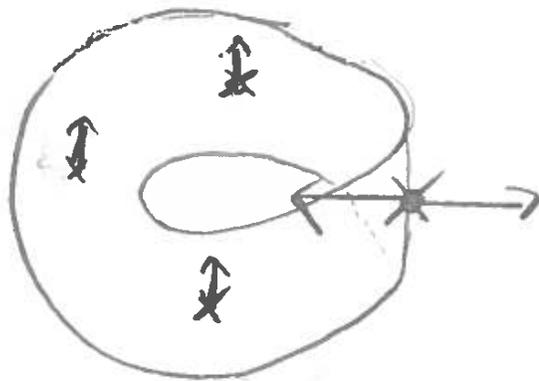


Abbildung 6.6: Es gibt keine Koorientierung des Möbiusbandes: Wir nehmen widerspruchswise an, dass es eine solche Koorientierung gibt. Wir betrachten den Fall, dass diese Koorientierung auf der rechten Seite des Bildes nach links zeigt. (Den andere Fall können wir analog behandeln.) Wir gehen um das Möbiusband herum. Die Koorientierung dreht dabei mit. Sobald wir wieder am Ausgangspunkt angekommen sind, zeigt die Koorientierung jetzt nach rechts. Das ist ein Widerspruch. Daher gibt es keine Koorientierung des Möbiusbandes.

eine positive Basis von  $\mathbb{R}^n$  ist. (Überlegen Sie sich, dass  $\nu$  existiert und stetig ist!)  
Falls  $n = 3$ , dann gilt

$$\nu(x) = \frac{D_1\psi \times D_2\psi}{\|D_1\psi \times D_2\psi\|}(\psi^{-1}(x)), \quad \forall x \in M. \quad (6.11)$$

**Beispiel 6.20.** [Koorientierung der Hemisphäre] Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : B^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}).$$

Das ist eine glatte Einbettung mit Bild gegeben durch die obere Hemisphäre (ohne Rand)

$$S_+^2 := \{x \in S^2 \mid x_3 > 0\}.$$

Wir haben

$$D_1\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_1 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \end{pmatrix}, \quad D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_2 \\ -\frac{y_2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \end{pmatrix},$$

$$D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 + \frac{y_1}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 0 + \frac{y_2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\| = \sqrt{\frac{\|y\|^2}{1-\|y\|^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-\|y\|^2}}, \quad (6.13)$$

$$\nu(\psi(y)) = \frac{D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)}{\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\|} = (y, \sqrt{1-\|y\|^2}) = \psi(y).$$

Wegen [\(6.11\)](#) gilt daher, dass

$$\nu(x) = x, \quad \forall x \in S_+^2.$$

Das stimmt mit der Koorientierung aus Beispiel [6.18](#) überein.

Seien  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  eine  $C^1$ -Fläche<sup>7</sup> mit Rand und  $\nu$  eine Koorientierung von  $\Sigma$ .

**Definition 6.21** (induzierte Orientierung). *Wir definieren die durch  $\nu$  induzierte Orientierung  $T$  von  $\partial\Sigma$  wie folgt. Seien  $x \in \partial\Sigma$  und  $(V, \psi)$  eine lokale  $C^1$ -Randparametrisierung von  $\Sigma$ , deren Bild  $x$  enthält und die [\(6.11\)](#) erfüllt. Wir definieren  $y := \psi^{-1}(x) \in V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$  und*

$$T(x) := \frac{D_1\psi(y)}{\|D_1\psi(y)\|} \in \mathbb{R}^3.$$

**Bemerkungen 6.22.** [induzierte Orientierung]

- (i) Die Orientierung  $T$  ist wohldefiniert, d. h., sie hängt nicht von der Wahl von  $(V, \psi)$  ab. (Überlegen Sie sich das!)
- (ii) Falls  $(V, \psi)$  eine globale  $C^1$ -Parametrisierung von  $\Sigma$  ist, die [\(6.11\)](#) erfüllt, dann ist diese Orientierung gegeben durch

$$T = \left( \frac{D\psi \tilde{T}}{\|D\psi \tilde{T}\|} \right) \circ \psi^{-1} : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

<sup>7</sup>d. h. eine zwei-dimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$

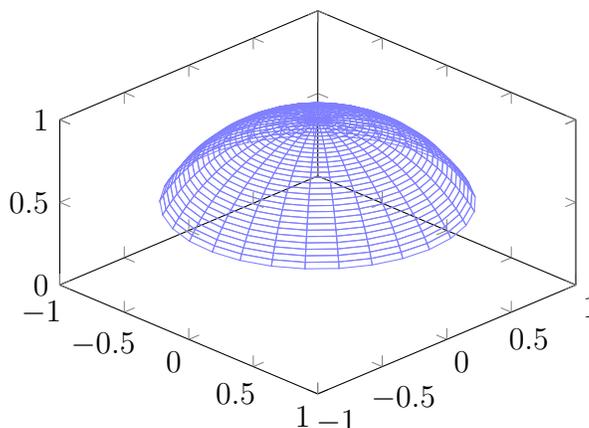


Abbildung 6.7: eine Kugelkappe

wobei  $\tilde{T}$  die positive Orientierung von  $\partial V \subseteq \mathbb{R}^2$  ist. (Siehe Definition [6.11](#))  
Überlegen Sie sich das!

**Beispiel 6.23.** [Kugelkappe und induzierte Orientierung] Für  $a \in (-1, 1)$  betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \{x \in S^2 \mid x_3 \geq a\}.$$

Siehe Abbildung [6.7](#).  $\Sigma_a$  ist eine glatte Fläche mit Rand. Um das im Fall  $a > 0$  [8](#) einzusehen, betrachten wir  $V := B_{\sqrt{1-a^2}}^2$  und die Abbildung

$$\psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}).$$

Das ist eine globale glatte Parametrisierung von  $\Sigma_a$ . Gemäss Bemerkung [6.16](#) ist  $\Sigma_a$  daher tatsächlich eine glatte Fläche mit Rand gegeben durch

$$\partial\Sigma_a = \psi(\partial V = S_{\sqrt{1-a^2}}^1) = S_{\sqrt{1-a^2}}^1 \times \{a\}.$$

(Überlegen Sie sich die letzte Gleichheit!) Wir betrachten die Koorientierung von  $\Sigma_a$  gegeben durch

$$\nu : \Sigma_a \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(x) := x.$$

Die Orientierung von  $\partial\Sigma_a = S_{\sqrt{1-a^2}}^1 \times \{a\}$  induziert durch  $\nu$  ist

$$T : \partial\Sigma_a \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(-x_2, x_1, 0).$$

Im Fall  $a > 0$  folgt das aus Beispiel [6.20](#) (Koorientierung der Hemisphäre) und Bemerkung [6.22\(ii\)](#). (Wie?) In der allgemeinen Situation folgt das aus einem ähnlichen

<sup>8</sup>Im Fall  $a \leq 0$  folgt die Aussage mit Hilfe der stereographischen Projektion durch den Südpol.



Abbildung 6.8: Jørgen Pedersen Gram, dänischer Mathematiker und Aktuar, 1850–1916.

Argument, indem wir stereographische Projektion durch den Südpol als Parametrisierung verwenden. Im Fall  $a = 0$  ist  $\Sigma$  die abgeschlossene obere Hemisphäre, und es gilt, dass

$$T(x) = (-x_2, x_1, 0).$$

## 6.4 Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit, Zusammenhang mit dem Kurvenintegral

Für die Definition des Integrals einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit benötigen wir das Folgende. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ .

**Definition** (Gramsche Matrix). *Wir definieren die zu  $A$  gehörige Gramsche Matrix als die Matrix  $A^T A$ . Wir definieren die zu  $A$  gehörige Gramsche Determinante als  $\det(A^T A)$ , die Determinante der Gramschen Matrix.*

Diese Matrix ist nach Jørgen Pedersen Gram benannt, siehe Abbildung [6.8](#).

**Hilfssatz 6.24** (Gramsche Determinante). (i) *Es gilt  $\det(A^T A) \geq 0$ .*

(ii) *Falls die Abbildung  $\mathbb{R}^d \ni v \mapsto Av \in \mathbb{R}^n$  injektiv ist, dann gilt  $\det(A^T A) > 0$ .*

Beweis: Das folgt aus dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen. (Siehe lineare Algebra.)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $d$  mit Rand.

**Proposition 6.25** (Integral über Untermannigfaltigkeit). *Es gilt:*

- (i) *Es gibt ein  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , und für jedes  $j = 1, \dots, \ell$  gibt es eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $(V_j, \psi_j)$  von  $M$  und eine Jordan-messbare Menge  $S_j$ , sodass*

$$\begin{aligned} \overline{S_j} &\subseteq V_j, \\ \psi_j(S_j) \cap \psi_k(S_k) &= \emptyset, \quad \forall j \neq k, \\ \bigcup_{j=1}^{\ell} \psi_j(S_j) &= M. \end{aligned} \tag{6.14}$$

*Seien jetzt  $f \in C(M, \mathbb{R})$  und  $\ell$ ,  $(\psi_j, S_j)_j := (V_j, \psi_j, S_j)_{j=1, \dots, \ell}$  wie in (i). Wir definieren*

$$\begin{aligned} I(f, \psi_j, S_j) &:= I(f, (\psi_j, S_j)_j) \\ &:= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{S_j} f \circ \psi_j \sqrt{\det((D\psi_j)^T D\psi_j)} dy. \end{aligned} \tag{6.15}$$

- (ii) *Die Zahl  $I(f, \psi_j, S_j)$  hängt nicht von  $(\psi_j, S_j)_j$  ab.*

Der Beweis von (ii) beruht auf der Kettenregel und dem Produktsatz für die Determinante, welcher besagt, dass  $\det(AB) = \det A \det B$ .

**Bemerkung.** Gemäss Hilfssatz 6.24(i) ist  $\det((D\psi_j)^T D\psi_j)$  nicht negativ. Darum existiert die Quadratwurzel dieser Zahl (und ist reell). Daher ist der Integrand auf der rechten Seite von (6.15) sinnvoll. Da dieser Integrand auf  $V_j$  stetig ist und  $S_j$  Jordan-messbar ist, ist der Integrand Riemann-integrierbar über  $S_j$ . Die rechte Seite von (6.15) ist daher sinnvoll.

**Definition 6.26** (Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand). *Für jedes  $f \in C(M, \mathbb{R})$  definieren wir das Riemann-Integral von  $f$  (über  $M$ ) als*

$$\int_M f dA := I(f, \psi_j, S_j),$$

*wobei die rechte Seite durch (6.15) gegeben ist mit einer beliebigen Kollektion  $(\psi_j, S_j)_j$  wie in Proposition 6.25(i). Wir definieren das  $d$ -dimensionale Volumen von  $M$  als*

$$\text{Vol}_d(M) := \int_M 1 dA. \tag{6.16}$$

**Bemerkung.** Gemäss Proposition 6.25 ist dieses Integral wohldefiniert.

**Beispiel 6.27.** Wir berechnen das 1-dimensionale Volumen des Einheitskreises  $M = S^1$ , d. h. seine Länge, gemäss der Definition [6.26](#). Dazu setzen wir  $\ell := 2$  und

$$V_1 := (0, 2\pi), \quad \psi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_1(y) := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad S_1 := \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$V_2 := (-\pi, \pi), \quad \psi_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_2(y) := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad S_2 := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für  $j = 1, 2$  haben wir  $D\psi_j(y) = \begin{pmatrix} -\sin y \\ \cos y \end{pmatrix}$ , daher

$$D\psi_j(y)^T D\psi_j(y) = (-\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1,$$

$$\text{also } \sqrt{\det(D\psi_j(y)^T D\psi_j(y))} = 1. \quad (6.17)$$

Gemäss Definition [6.26](#) gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}_1(S^1) &= \int_{S^1} 1 \, dA \\ &= I(1, \psi_j, S_j) \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} 1 \cdot 1 \, dy \quad (\text{gemäss } \a href="#">6.15 \a href="#">6.17)) \\ &= |S_1| + |S_2| \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Die Länge des Einheitskreises ist also  $2\pi$ . Das stimmt mit dem überein, was wir in [Beispiel 6.3](#) berechnet haben.

**Bemerkungen.** (i) Falls  $d = n$ , dann gilt

$$\sqrt{\det((D\psi_j)^T D\psi_j)} = \sqrt{|\det(D\psi_j)^T| |\det(D\psi_j)|} = |\det(D\psi_j)|.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_M f \, dA &= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{S_j} f \circ \psi_j |\det D\psi_j| \, dy \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\psi_j(S_j)} f \, dx \quad (\text{gemäss Satz } \a href="#">5.24 \text{ Substitutionsregel}) \\ &= \int_M f(x) \, dx \end{aligned}$$

(gewöhnliches mehrdimensionales Riemann-Integral). Diese Rechnung ergibt für  $d < n$  keinen Sinn, da  $D\psi_j(y)$  eine  $n \times d$ -Matrix ist und daher nur dann eine Determinante besitzt, falls  $d = n$ .

- (ii) Im Fall  $d = 1$  stimmt das Integral über eine Untermannigfaltigkeit überein mit dem Kurvenintegral, siehe Proposition [6.28](#). Die Idee des Beweises davon ist wie folgt. Seien  $M = C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Kurve mit Rand und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir betrachten den Fall, in dem es ein offenes Intervall  $V$  und eine globale  $C^1$ -Parametrisierung  $\psi = x : \bar{V} \rightarrow C$  gibt. Dann gilt  $Dx = \dot{x}$ , darum

$$(Dx)^T Dx = \dot{x}^T \dot{x} = \|\dot{x}\|^2$$

und daher

$$\sqrt{\det((Dx)^T Dx)} = \|\dot{x}\|.$$

Daher gilt in diesem Fall, dass

$$\begin{aligned} \int_C f \, dA &= \int_{I:=\bar{V}} f \circ x \sqrt{\det((Dx)^T Dx)} \, dy \\ &= \int_I f \circ x \|\dot{x}\| \, dt \\ &= \int_C f \, ds. \end{aligned}$$

(Siehe Definition [6.2](#) Kurvenintegral. Strikt genommen haben wir die rechte Seite nur im Fall ohne Rand definiert, aber dieselbe Definition funktioniert auch mit Rand.)

- (iii) Wir betrachten jetzt die allgemeine Situation. Intuitiv ist  $\int_M f \, dA$  das  $(d+1)$ -dimensionale Volumen (mit Vorzeichen) des Gebietes in  $\mathbb{R}^{n+1}$  zwischen  $M \times \{0\}$  und dem Graphen von  $f$ . Um das verstehen, definieren wir das  $d$ -dimensionale Volumen eines Parallelepipeds  $P$  der Dimension  $\leq d$  in  $\mathbb{R}^n$  als

$$\text{Vol}_d(P) := \text{Vol}_d(O(P)), \tag{6.18}$$

wobei  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine orthogonale Transformation ist, sodass  $O(P) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}$ , wobei wir  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  mit  $\mathbb{R}^d$  identifizieren.  $\text{Vol}_d(P)$  ist wohldefiniert, d. h., es gibt ein solches  $O$ , und die rechte Seite von [\(6.18\)](#) hängt nicht von  $O$  ab.

Betrachten wir zum Beispiel den Fall, dass  $d = 1$ ,  $n = 3$  und  $P$  ein 1-dimensionales Parallelepiped, also eine Strecke, in  $\mathbb{R}^3$  ist. Dann können wir  $O$  als eine Drehung in  $\mathbb{R}^3$  wählen, die  $P$  parallel zur  $x^1$ -Achse ausrichtet.  $\text{Vol}_1(P)$  ist in diesem Fall die Länge der Strecke.

Die Definition [\(6.18\)](#) ist dadurch motiviert, dass das  $d$ -dimensionale Volumen einer Menge intuitiv gleich bleibt, wenn wir die Menge drehen.

Sei jetzt  $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung und  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Quader. Das Bild von  $Q$  unter  $\Psi$  ist ein Parallelepiped in  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $\leq d$ .

**Behauptung.** *Es gilt*

$$\text{Vol}_d(\Psi(Q)) = \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)} \text{Vol}_d(Q). \quad (6.19)$$

**Beweis der Behauptung:** Wir wählen eine orthogonale Transformation  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass

$$O \text{ im } \Psi \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

Gemäss (6.18) gilt

$$\text{Vol}_d(\Psi(Q)) = \text{Vol}_d(O(\Psi(Q))). \quad (6.20)$$

Wir schreiben

$$O\Psi = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit  $B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Es gilt  $O(\Psi(Q)) = B(Q) \times \{0\}$  und daher

$$\begin{aligned} \text{Vol}_d(O(\Psi(Q))) &= \text{Vol}_d(B(Q)) \\ &= |\det B| \text{Vol}_d(Q) \quad (\text{Transformationssatz, Korollar 5.29}). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Es gilt<sup>9</sup>

$$B^T B = \Psi^T O^T O \Psi = \Psi^T \Psi, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} |\det B| &= \sqrt{(\det B)^2} \\ &= \sqrt{\det B^T B} \\ &= \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)} \quad (\text{wegen (6.22)}). \end{aligned} \quad (6.23)$$

(Gemäss Hilfssatz 6.24(i) ist  $\det(B^T B) \geq 0$  und daher die Wurzel dieser Zahl eine wohldefinierte reelle Zahl.) Indem wir (6.20) (6.21) (6.23) kombinieren, erhalten wir

$$\text{Vol}_d(\Psi(Q)) = \sqrt{\det(\Psi^T \Psi)} \text{Vol}_d(Q),$$

d. h. die Gleichheit (6.19). Das beweist die Behauptung.  $\square$

Sei jetzt  $y_0 \in V_j$ . Wir definieren

$$\Phi_{j,y_0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_{j,y_0}(y) := D\psi_j(y_0)(y - y_0) + \psi_j(y_0). \quad (6.24)$$

<sup>9</sup>Hierbei fassen wir  $B$  etc. als Matrizen auf.

Das ist die beste affine Näherung von  $\psi_j$  um  $y_0$ . (Vergleiche mit (3.10).) Heuristisch bildet  $\psi_j$  einen infinitesimalen Quader  $Q$  mit Mittelpunkt  $y_0$  auf das infinitesimale  $d$ -dimensionale Parallelepipid  $\psi_j(Q) = \Phi_{y_0}(Q)$  in  $\mathbb{R}^n$  ab. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} dy &:= \text{Vol}_d(Q), \\ dA &:= \text{Vol}_d(\psi_j(Q)) = \text{Vol}_d(\Phi_{j,y_0}(Q)). \end{aligned}$$

(Falls wir  $dy^i$  für die Länge der  $i$ -ten Seite von  $Q$  schreiben, dann gilt, dass  $dy = dy^1 \cdots dy^n$ .) Gemäss (6.24) (6.19) mit  $\Psi := D\psi_j(y_0)$  gilt heuristisch

$$dA = \sqrt{\det(D\psi_j(y_0)^T D\psi_j(y_0))} dy. \quad (6.25)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_M f dA &= \sum_j \int_{S_j} (f \circ \psi_j) \sqrt{\det((D\psi_j)^T D\psi_j)} dy \quad (\text{gemäss Definition (6.26)}) \\ &= \sum_j \sum_{y_0 \in S_j} f(\psi_j(y_0)) \sqrt{\det(D\psi_j(y_0)^T D\psi_j(y_0))} dy \quad (\text{heuristisch}) \\ &= \sum_{x_0 \in M} f(x_0) dA \quad (\text{heuristisch gemäss (6.25) mit } x_0 = \psi_j(y_0)), \end{aligned}$$

und das ist intuitiv das  $(d+1)$ -dimensionale Volumen (mit Vorzeichen) des Gebietes in  $\mathbb{R}^{n+1}$  zwischen  $M \times \{0\}$  und dem Graphen von  $f$ .

- (iv) Im Buch (DK04b) wird das Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit mit Hilfe einer Zerlegung der eins definiert, siehe (DK04b) Definition 7.1.2, p. 490]. Diese Definition ist äquivalent zur Definition (6.26). In konkreten Beispielen ist Definition (6.26) allerdings einfacher anzuwenden.
- (v) Im Buch (DK04b) wird für  $\int_M f dA$  die Notation  $\int_M f(x) d_d x$  verwendet, siehe (DK04b) Definition 7.3.1, p. 495].

Im Fall  $d = 1$  stimmt das Integral über eine Untermannigfaltigkeit mit dem Kurvenintegral überein:

**Proposition 6.28** (Kurvenintegral, Integral über Untermannigfaltigkeit). *Seien  $C$  eine kompakte  $C^1$ -Kurve in  $\mathbb{R}^n$  (ohne Rand),  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $(I_j = [a_j, b_j], x_j)_{j=1, \dots, \ell}$  wie in Definition (6.2) (Kurvenintegral). Dann gibt es eine Kollektion  $(V_j, \psi_j, S_j)$  wie in Proposition (6.25)(i) (Integral über Untermannigfaltigkeit) mit  $M = C$ , sodass*

$$I(f, (I_j, x_j)_j) = I(f, (\psi_j, S_j)_j),$$

wobei die linke Seite wie in (6.1) definiert ist und die rechte Seite wie in (6.15).

Die Idee des Beweises dieser Proposition wurde in Bemerkung [6.4\(ii\)](#) erklärt.

**Korollar 6.29** (Kurvenintegral). *Das Kurvenintegral  $\int_C f ds$  ist wohldefiniert, d. h., es hängt nicht von der Wahl der Kollektion  $(I_j, x_j)_j$  ab.*

**Beweis des Korollars 6.29:** Gemäss Proposition [6.25\(ii\)](#) (Integral über Untermannigfaltigkeit) hängt  $I(f, \psi_j, S_j)$  nicht von der Wahl der Kollektion  $(\psi_j, S_j)$  ab. Gemäss Proposition [6.28](#) hängt  $I(f, (I_j, x_j)_j)$  darum nicht von der Kollektion  $(I_j, x_j)_j$  ab. Das beweist Korollar [6.29](#).  $\square$

## 6.5 Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, zweidimensionaler Fall, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche

Für eine Funktion auf einer global parametrisierbaren Untermannigfaltigkeit können wir das Integral mit Hilfe einer globalen Parametrisierung berechnen. Das ist der Inhalt der folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 6.30.** [Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit] Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale kompakte parametrisierbare  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit,  $\psi : \bar{V} \rightarrow M$  eine (globale)  $C^1$ -Parametrisierung und  $f \in C(M, \mathbb{R})$ . Es gilt

$$\int_M f dA = \int_{\bar{V}} f \circ \psi(y) \sqrt{\det(D\psi(y)^T D\psi(y))} dy. \quad (6.26)$$

Das folgt aus der Tatsache, dass die Einschränkung  $\psi|_V$  eine lokale innere Parametrisierung von  $M$  ist.

Im folgenden Beispiel wenden wir Bemerkung [6.30](#) an.

**Beispiel 6.31.** [Integral über Untervektorraum] Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  der Durchschnitt eines  $d$ -dimensionalen Untervektorraumes  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  mit dem abgeschlossenen Einheitsball  $\bar{B}^n$ , siehe Abbildung [6.9](#). Um das Volumen von  $M$  zu berechnen, wählen wir eine orthogonale Transformation  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $O(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = W$ . (Überlegen Sie sich, dass es ein solches  $O$  gibt!) Wir definieren

$$\iota : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \iota(y) := (y, 0), \quad \psi := O \circ \iota : \bar{B}^d \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Es gilt

$$M = \psi(\bar{B}^d),$$

$$D\psi(y) = O\iota, \implies h_\psi := \sqrt{\det(D\psi(y)^T D\psi(y))} = \sqrt{\det(\iota^T O^T O \iota)} = 1.$$

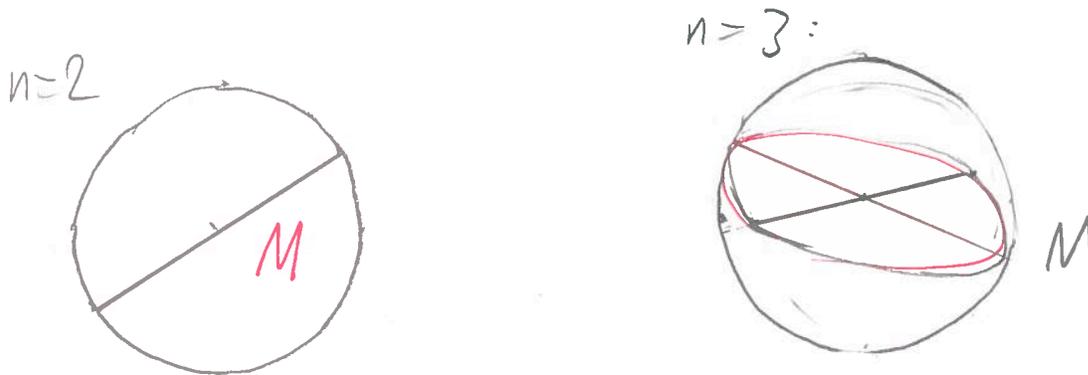


Abbildung 6.9: Durchschnitt eines  $d$ -dimensionalen Untervektorraumes mit einem Ball.

Gemäss Bemerkung 6.30 gilt daher, dass

$$\text{Vol}_d(M) = \int_M dA = \int_{\bar{B}^d} h_\psi dy = |\bar{B}^d|.$$

(Die rechte Seite wird in Übungsserie 11 berechnet.) Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass das  $d$ -dimensionale Volumen gleich bleibt, wenn wir eine orthogonale Transformation auf  $M$  anwenden.

Im Fall  $d = 2$  und  $n = 3$  können wir das Integral über eine Fläche wie folgt berechnen.

**Hilfssatz 6.32** (gramsche Determinante für eine  $3 \times 2$ -Matrix). Für jedes  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  gilt, dass

$$\det(A^T A) = \|A_1 \times A_2\|^2,$$

wobei  $A_j$  die  $j$ -te Spalte von  $A$  bezeichnet.

Beweis: Übungsserie 13

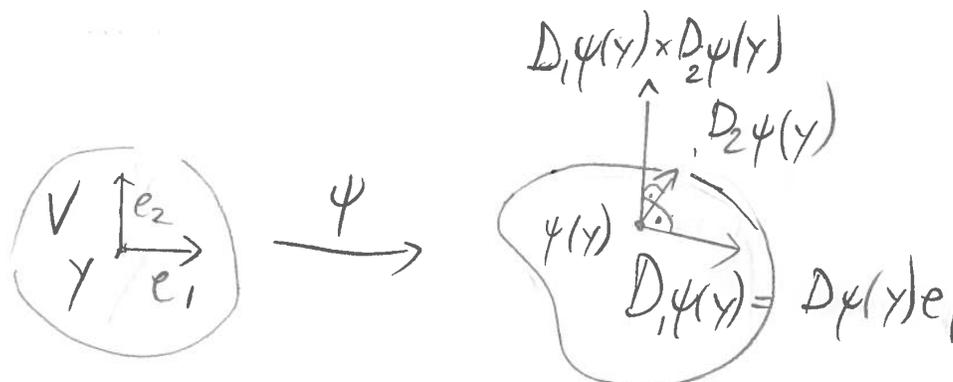
**Bemerkung.** Aus diesem Hilfssatz folgt, dass im Fall  $d = 2$  und  $n = 3$  gilt, dass

$$\sqrt{\det((D\psi)^T D\psi)} = \|D_1\psi \times D_2\psi\|, \quad (6.27)$$

siehe Abbildung 6.10

**Beispiel 6.33.** [Flächeninhalt der Kugelkappe und der zweidimensionalen (Hemi-)Sphäre] Für  $a > 0$  betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \{x \in S^2 \mid x_3 \geq a\}.$$

Abbildung 6.10: Der Vektor  $D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)$ .

Siehe Abbildung [6.7](#). Wir berechnen den Flächeninhalt von  $\Sigma_a$ . Dazu betrachten wir die globale glatte Parametrisierung von  $\Sigma_a$  gegeben durch

$$\psi : \overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}).$$

Gemäss Beispiel [6.20](#) (siehe [6.13](#)) gilt

$$\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}. \quad (6.28)$$

Der Flächeninhalt von  $\Sigma_a$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\Sigma_a| &= \text{Vol}_2(\Sigma_a) \\ &= \int_{\Sigma_a} 1 \, dA \\ &= \int_{\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \, dy \quad (\text{gemäss Bemerkung } \a href="#">6.30, \a href="#">6.27, \a href="#">6.28) \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r \, dr \quad (\text{gemäss Korollar } \a href="#">5.26, \text{Integral einer drehinvarianten Funktion}) \\ &= -2\pi \sqrt{1-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-a^2}} \\ &= 2\pi(1-a). \end{aligned}$$

Im Limes  $a \rightarrow 0$  erhalten wir den Flächeninhalt der oberen abgeschlossenen Hemisphäre  $\Sigma_+ = \{x \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$ , nämlich

$$|\Sigma_+| = \lim_{a \rightarrow 0} |\Sigma_a| = \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi(1-a) = 2\pi.$$

Das ist gleich dem Flächeninhalt der unteren abgeschlossenen Hemisphäre  $\Sigma_- := \{x \in S^2 \mid x_3 \leq 0\}$ , da diese durch Drehung aus  $\Sigma_+$  hervorgeht. Die Sphäre  $S^2$  ist die Vereinigung der beiden Hemisphären  $\Sigma_{\pm}$ . Der Durchschnitt dieser Hemisphären ist der Äquator  $\{x \in S^2 \mid x_3 = 0\}$ , welcher Flächeninhalt gleich 0 besitzt. Daher beträgt der Flächeninhalt der Sphäre  $S^2$

$$|S^2| = \text{Vol}_2(S^2) = |\Sigma_+| + |\Sigma_-| = 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

**Bemerkung.** Heuristisch gilt im Fall  $n = 3$  und  $d = 2$  gemäss Definition [6.26](#) und [\(6.25\)\(6.27\)](#) mit  $\psi_j = \psi$ , dass

$$dA = \|D_1\psi \times D_2\psi\| dy.$$

Wir können das als den Flächeninhalt eines “infinitesimalen Flächenstücks” auffassen. Der Ausdruck  $\|D_1\psi \times D_2\psi\|$  ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch  $D_1\psi$  und  $D_2\psi$  aufgespannt wird.

Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte  $C^1$ -Hyperfläche mit Rand,  $X \in C(M, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld und  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Koorientierung.

**Definition 6.34** (Fluss durch Hyperfläche). *Wir definieren den Fluss von  $X$  durch  $M$  bezüglich  $\nu$  als das Integral*

$$\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A} := \int_M X \cdot \nu dA, \tag{6.29}$$

wobei die rechte Seite wie in Definition [6.26](#) (Integral über eine kompakte Untermannigfaltigkeit) definiert ist.

**Bemerkungen 6.35.** [Fluss durch eine Hyperfläche]

- (i) Heuristisch ist  $d\mathbf{A} = \nu dA$  ein infinitesimaler Normalenvektor und

$$\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \sum_{x \in M} X \cdot d\mathbf{A}. \tag{6.30}$$

- (ii) Im **Fall**  $n = 3$  heisst der Fluss  $\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A}$  auch das (Ober-)Flächenintegral von  $X$  durch  $\Sigma = M$ .
- (iii) Der Name *Fluss* wird durch die folgende anschauliche strömungsmechanische Interpretation motiviert. Wir betrachten eine stationär<sup>10</sup> strömende Flüssigkeit.

<sup>10</sup>Das bedeutet, dass ihre Geschwindigkeit in jedem Punkt zeitlich konstant bleibt.

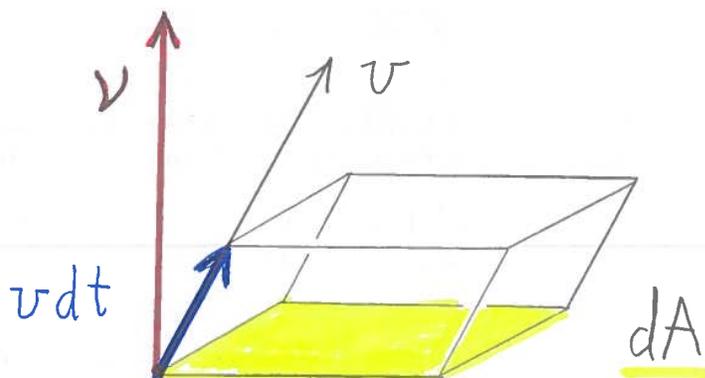


Abbildung 6.11:  $\rho$  mal das Volumen des Parallelepipeds, das durch ein infinitesimales Flächenstück mit Flächeninhalt  $dA$  und durch  $v dt$  aufgespannt wird, ist gleich der Anzahl Teilchen, die in der Zeitspanne  $dt$  durch das infinitesimale Flächenstück fließen. Diese Anzahl ist gleich  $\rho(v dt) \cdot \nu dA = X \cdot \nu dA dt = X \cdot d\mathbf{A} dt$ .

Wir schreiben  $\rho(x)$  für die Teilchenzahldichte<sup>11</sup> der Flüssigkeit im Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  und  $v(x)$  für ihren Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $x$ . Das Produkt von  $\rho$  und  $v$  ist ein Vektorfeld  $X := \rho v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Der Fluss von  $X$  durch eine Fläche  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  ist die Anzahl Teilchen der Flüssigkeit, die pro Zeitspanne durch  $\Sigma$  fließen<sup>12</sup>. Das folgt aus der heuristischen Gleichheit (6.30) und Abbildung 6.11.

- (iv) Der Fluss  $\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A}$  eines Vektorfeldes  $X$  durch eine Hyperfläche  $M$  wie in Definition 6.34 unterscheidet sich vom Fluss  $\varphi_X$ , den wir in Bemerkung 3.47 kennengelernt hatten. Im Englischen wird diese Unterscheidung auch sprachlich gemacht.  $\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A}$  wird dort nämlich *flux* und  $\varphi_X$  *flow* genannt.
- (v) Falls  $(V, \psi)$  eine globale  $C^1$ -Parametrisierung von  $\Sigma$  ist, sodass (6.11) gilt, dann gilt

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_V (X \circ \psi) \cdot (D_1\psi \times D_2\psi) dy. \quad (6.31)$$

Das folgt aus Bemerkung 6.30 (Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) und (6.27).

**Beispiel 6.36.** [Fluss durch Kugelkappe] Für  $a > 0$  betrachten wir die Kugelkappe

$$\Sigma_a := \{x \in S^2 \mid x_3 \geq a\}$$

und die Koorientierung  $\nu$  von  $\Sigma_a$  und das Vektorfeld  $X$  auf  $\Sigma_a$  gegeben durch

$$\nu : \Sigma_a \rightarrow \mathbb{R}^3, \nu(x) := x, \quad X \equiv e_3.$$

<sup>11</sup>Diese Grösse wird auch *Teilchendichte* genannt.

<sup>12</sup>Die Einheit dieses Flusses ist  $\text{sec}^{-1}$ .

Frage:

$$\int_{\Sigma_a, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = ?$$

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die globale Parametrisierung von  $\Sigma_a$  gegeben durch

$$\psi : \overline{B}_{\sqrt{1-a^2}} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) := (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}).$$

Gemäss Beispiel 6.20 (siehe 6.12)) gilt

$$D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} y \\ \sqrt{1 - \|y\|^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und stimmt die Koorientierung von  $\Sigma_a$  induziert durch  $\psi$  mit  $\nu$  überein. Gemäss 6.31) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_a, \nu} X \cdot d\mathbf{A} &= \int_{B_{\sqrt{1-a^2}}} e_3 \cdot \begin{pmatrix} y \\ \sqrt{1 - \|y\|^2} \\ 1 \end{pmatrix} dy \\ &= \int_{B_{\sqrt{1-a^2}}} 1 dy \\ &= \pi(1 - a^2). \end{aligned} \tag{6.32}$$

Indem wir den Grenzwert für  $a \rightarrow 0$  nehmen, erhalten wir daraus:

$$\text{Fluss von } X \text{ durch die obere Hemisphäre } \Sigma_0 = \int_{\Sigma_0, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \pi.$$

## 6.6 Satz von Stokes

Der Satz von Stokes besagt, dass der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes über eine kompakte Fläche in  $\mathbb{R}^3$  gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche ist. Erinnerung an Definition 3.46(ii): Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $U$ . Wir definieren die *Rotation von  $X$*  als das Vektorfeld

$$\vec{\text{rot}}X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**Beispiel 6.37.** [Rotation] Wir betrachten

$$X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \frac{1}{2}(-x_2, x_1, 0).$$

Es gilt

$$\nabla \times X(x) \equiv (0, 0, 1) = e_3.$$

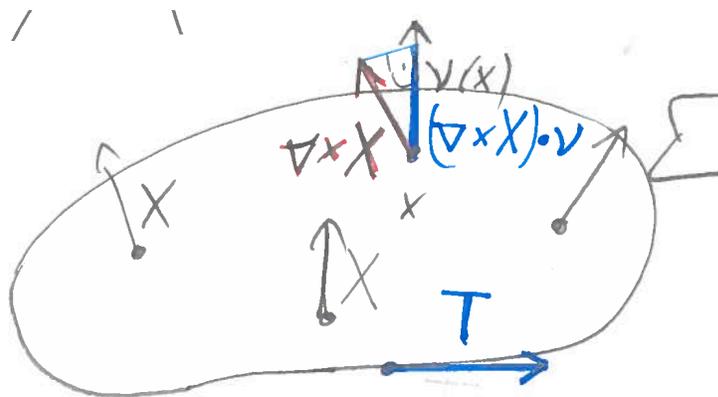


Abbildung 6.12: Satz von Stokes.

**Bemerkung.** Für eine Motivation des Namens *Rotation* siehe die Bemerkungen [3.49](#)

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

**Satz 6.38** (Stokes). Seien  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte  $C^2$ -Fläche,  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Ko-orientierung,  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Umgebung von  $\Sigma$  und  $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt, dass

$$\int_{\Sigma, \nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} (\nabla \times X) \cdot \nu \, dA = \int_{\partial\Sigma, T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Sigma} X \cdot T \, ds, \quad (6.33)$$

wobei  $T$  die durch  $\nu$  induzierte Orientierung von  $\partial\Sigma$  ist.

Abbildung [6.12](#) verdeutlicht diesen Satz. In Worten besagt er: Der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine koorientierte Fläche ist gleich dem Kurvenintegral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche.

Beweis: [\[Stra\]](#), Satz 8.7.1, S. 221] oder [\[DK04b\]](#), Theorem 8.4.4, p. 560]

**Bemerkungen.** • Der Satz von Stokes kann aus dem Satz von Green (Satz [6.12](#)) hergeleitet werden, falls  $\Sigma$  global parametrisierbar ist.

- Der Satz von Stokes besitzt wichtige Anwendungen in der Physik, insbesondere in der Strömungslehre und in der Elektrodynamik. Er wird zum Beispiel verwendet, um zu zeigen, dass das faradaysche Induktionsgesetz zu einer der vier Maxwellgleichungen äquivalent ist. (Siehe Beispiel [6.40](#) und Übungsserie 14.) Dieses Gesetz besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss in einer geschlossenen Kurve im Raum eine elektrische Spannung induziert, die gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche ist.<sup>13</sup> (Siehe [\[DK04b\]](#), Exercise 8.26 (iii) (Faraday's law), p. 748 [.] )

<sup>13</sup>Die Spannung ist dieser Änderung entgegengerichtet.

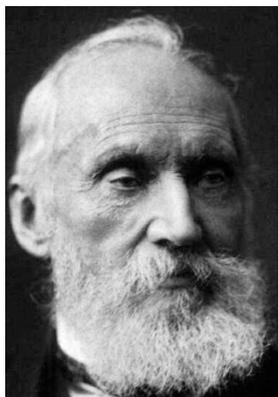


Abbildung 6.13: William Thomson = Lord Kelvin, britischer Physiker und Ingenieur, 1824–1907.

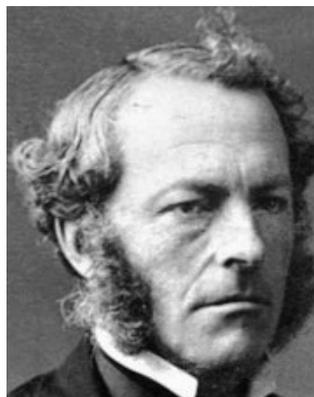


Abbildung 6.14: George Stokes, irischer Mathematiker und Physiker, 1819–1903.

8. If  $X, Y, Z$  be functions of the rectangular co-ordinates  $x, y, z$ ,  $dS$  an element of any limited surface,  $l, m, n$  the cosines of the inclinations of the normal at  $dS$  to the axes,  $ds$  an element of the bounding line, shew that

$$\begin{aligned} \iint \left\{ l \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + m \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + n \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \right\} dS \\ = \int \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds, \end{aligned}$$

the differential coefficients of  $X, Y, Z$  being partial, and the single integral being taken all round the perimeter of the surface\*.

Abbildung 6.15: Die von Stokes gestellte Aufgabe zum Satz von Stokes im *Smith's Prize exam* des Jahres 1854.

- Der Satz von Green [6.12](#) ist der Spezialfall des Satzes von Stokes, in dem  $\Sigma = \bar{V} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .
- Der Satz von Stokes wurde durch William Thomson = Lord Kelvin gefunden. (Siehe [Abbildung 6.13](#).) Er erzählte George Stokes davon. (Siehe [Abbildung 6.14](#).) Stokes stellte den Satz als ein Problem im *Smith's Prize exam* an der Universität Cambridge. (Siehe [Abbildung 6.15](#).)

**Beispiel 6.39.** [Fluss durch Kugelkappe mittels des Satzes von Stokes] Sei  $a > 0$ . Wir betrachten

$$\Sigma := \{x \in S^2 \mid x_3 \geq a\}, \quad \nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(x) := x.$$

Im Beispiel [6.36](#) berechneten wir den Fluss

$$\int_{\Sigma, \nu} e_3 \cdot d\mathbf{A}$$

mittels der Definition. Wir berechnen diesen Fluss noch einmal, mittels des Satzes von Stokes. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & X(x) &:= \frac{1}{2}(-x_2, x_1, 0), \\ T : \partial\Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^3, & T(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(-x_2, x_1, 0), \end{aligned}$$

wie in den Beispielen [6.37](#) und [6.23](#). Gemäss Satz [6.38](#) (Stokes) und den Beispielen [6.37](#) (Rotation) und [6.23](#) (induzierte Orientierung) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma, \nu} e_3 \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\Sigma, \nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{\partial\Sigma, T} X \cdot ds \\ &= \int_{\partial\Sigma} X \cdot T ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \int_{S^1_{\sqrt{1-a^2}} \times \{a\}} ((-x_2)^2 + x_1^2) ds \\ &= \frac{(1-a^2)2\pi\sqrt{1-a^2}}{2\sqrt{1-a^2}} \\ &= \pi(1-a^2). \end{aligned}$$

Das stimmt mit unserer Berechnung in Beispiel [6.36](#) überein.

**Bemerkung.** In diesem Beispiel ersparte uns der Satz von Stokes Rechenarbeit.

Im folgenden Beispiel wenden wir den Satz von Stokes an, um aus einer der vier Maxwellgleichungen der Elektrodynamik das faradaysche Induktionsgesetz herzuleiten.

**Beispiel 6.40.** [Maxwellgleichung, faradaysches Induktionsgesetz, Satz von Stokes] Wir betrachten das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  als Funktionen der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  und des Ortes  $x \in \mathbb{R}^3$ . Eine der vier Maxwellgleichungen besagt, dass

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.34)$$

Diese Gleichung ist nach James Clerk Maxwell benannt, siehe Abbildung [6.16](#). Das

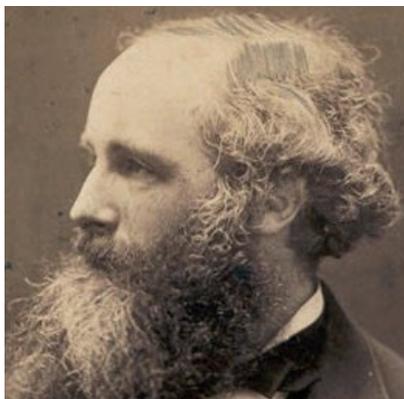


Abbildung 6.16: James Clerk Maxwell, 1831–1879, schottischer Physiker.

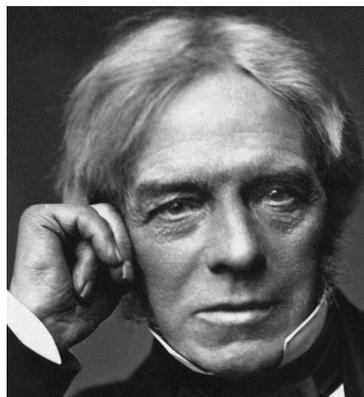


Abbildung 6.17: Michael Faraday, 1791–1867, englischer Experimentalphysiker.

faradaysche Induktionsgesetz besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss in einer geschlossenen Kurve im Raum eine elektrische Spannung induziert, die gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche ist.<sup>14</sup> Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  von der Klasse  $C^1$  sind. Wir fixieren eine kompakte  $C^2$ -Fläche  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$  und eine Koorientierung  $\nu$  von  $\Sigma$ . Wir schreiben  $T$  für die durch  $\nu$  induzierte Orientierung des Randes  $\partial\Sigma$ . Das faradaysche Induktionsgesetz besagt, dass

$$(\text{Spannung längs der Kurve } C := \partial\Sigma) = \int_{C,T} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma,\nu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.35)$$

Dieses Gesetz ist nach Michael Faraday benannt, siehe Abbildung 6.17. Wir leiten dieses Gesetz aus der Maxwellgleichung (6.34) mittels des Satzes von Stokes her: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{C,T} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} && (\text{gemäß Satz 6.38, Stokes}) \\ &= - \int_{\Sigma,\nu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} && (\text{gemäß der Maxwellgleichung (6.34)}) \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma,\nu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. && (\text{Mathematiker/innen haben das bewiesen.}) \end{aligned}$$

Das zeigt das faradaysche Induktionsgesetz (6.35). Das faradaysche Induktionsgesetz ist also die *integrale* (oder *globale*) Form eines physikalischen Gesetzes, die Maxwellgleichung (6.34) ist die *differentielle*<sup>15</sup> Form davon.

<sup>14</sup>Die Spannung ist dieser Änderung entgegengerichtet.

<sup>15</sup>d. h., mittels Ableitung formulierte

- Bemerkungen.**
- Das Faradaysche Induktionsgesetz impliziert, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss durch eine Fläche, die von einem Draht umspannt wird, einen Strom im Draht induziert. Dieses Prinzip ist die Grundlage für Elektromotoren und Generatoren.
  - Für eine ausführliche Behandlung der Maxwellgleichungen und des faradayschen Induktionsgesetzes siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.

## 6.7 Satz von Gauß

Der Satz von Gauß besagt, dass das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein  $C^1$ -Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch den Rand des Gebietes ist. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in der Physik, zum Beispiel in der Strömungslehre und der Elektrostatik. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir das  $n$ -dimensionale Volumen der Kugel  $S^n$  berechnen. Um den Satz zu formulieren, brauchen wir das Folgende. Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein offenes  $C^1$ -Gebiet und  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\bar{U}$ .

**Definition 6.41.** Wir definieren die Divergenz (oder Quellendichte) von  $X$  als die Funktion

$$\operatorname{div} X := \nabla \cdot X := \sum_{i=1}^n D_i X^i.$$

**Bemerkung.** Formal ist  $\nabla \cdot X$  das Standardskalarprodukt von  $\nabla = (D_1, \dots, D_n)$  mit  $X$ . Das ist der Grund für die Notation  $\nabla \cdot X$ .

**Beispiel 6.42.** [Divergenz] Wir betrachten das Euler-Vektorfeld

$$X := \operatorname{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X(x) := x.$$

Die Divergenz von  $X$  ist gegeben durch

$$\nabla \cdot X = \sum_{i=1}^n D_i x^i \equiv n.$$

**Definition 6.43** (Koorientierung des Randes). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Gebiet. Wir definieren die nach aussen weisende Koorientierung<sup>16</sup> von  $\partial U$  als die Abbildung

$$\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nu(x_0) := \frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|}, \quad (6.36)$$

wobei  $U' \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $x_0$  ist und  $g \in C^1(U', \mathbb{R})$  eine Submersion ist, sodass

$$U \cap U' = g^{-1}((-\infty, 0)).$$

<sup>16</sup>(oder das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld)



Abbildung 6.18: Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker, 1777–1855.

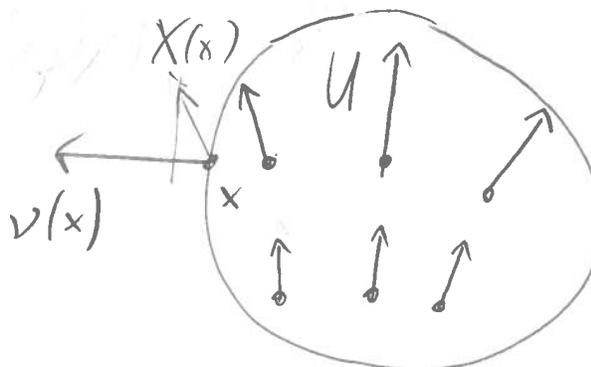


Abbildung 6.19: Satz von Gauß.

**Bemerkungen.** •  $(U', g)$  existiert gemäss der Definition eines  $C^1$ -Gebietes.

- $\nu(x_0)$  besitzt die Länge 1 und ist orthogonal zu  $T_{x_0}\partial U$ , da für jeden Vektor  $v \in T_{x_0}\partial U$  gilt, dass

$$\langle \nu(x_0), v \rangle = \frac{Dg(x_0)v}{\|\nabla g(x_0)\|} = 0.$$

Das folgt aus aus der Gleichheit  $g^{-1}(0) = U' \cap \partial U$  und Satz 4.37 (Charakterisierung des Tangentialraumes).

- $\nu(x_0)$  hängt nicht von der Wahl von  $(U', g)$  ab.

**Satz 6.44** (Divergenzsatz von Gauß). ([DK04b, Theorem 7.8.5, p. 529]) Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet und  $X \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ . Dann ist das Integral der Divergenz von  $X$  über  $U$  gleich dem Fluss von  $X$  durch den Rand von  $U$ , d. h.

$$\int_U \nabla \cdot X \, dx = \int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA, \quad (6.37)$$

wobei  $\nu$  die nach aussen weisende Koorientierung von  $\partial U$  ist.

Beweis: [DK04b, Theorem 7.8.5, p. 529] oder [Stra, Satz 8.8.1, S. 224] (Fall  $n = 3$ )

Dieser Satz ist nach Carl Friedrich Gauß benannt, siehe Abbildung 6.18. Abbildung 6.19 verdeutlicht den Satz.

**Bemerkung.** Der Satz von Gauß heisst auch *Divergenzsatz*.

**Beispiel.** [Satz von Gauß für  $n = 1$ , Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung] Wir betrachten den Fall  $n = 1$  und schreiben  $(a, b) := U$ ,  $f := X$ . Dann besagt

Satz [6.44](#) (Gauß), dass

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f' dx &= \int_U D_1 X^1 dx \\
 &= \int_U \nabla \cdot X dx \\
 &= \int_{\partial U} X \cdot \nu dA \\
 &= f(b) \cdot 1 + f(a) \cdot (-1) \\
 &= f(b) - f(a).
 \end{aligned}$$

Das ist der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Bemerkung.** [Beweis des Satzes von Gauß] Der Beweis des Satzes von Gauß beruht auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Idee ist, den Satz von Gauß mittels des Satzes von Fubini auf den eindimensionalen zu reduzieren und dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden. Siehe den Beweis von [DK04b](#), Theorem 7.8.5, p. 529].

**Beispiel 6.45.** [Satz von Gauß und Volumen der Sphäre] Wir berechnen das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Sphäre  $S^{n-1} := S_1^{n-1}(0)$ , indem wir den Satz von Gauß auf das Euler-Vektorfeld

$$X := \text{id} : \overline{B}^n := \overline{B}_1^n(0) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X(x) := x$$

anwenden. Die nach aussen weisende Koorientierung von  $\partial B^n = S^{n-1}$  ist durch  $\nu(x) = x$  gegeben. (Vergleichen Sie das mit [Beispiel 6.18](#).) Es gilt, dass

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) &= \int_{S^{n-1}} 1 dA \\
 &= \int_{S^{n-1}=\partial B^n} X \cdot \nu dA \\
 &= \int_{B^n} \nabla \cdot X dx \quad (\text{gemäss Satz } \a href="#">6.44, Gauß) \\
 &= \int_{B^n} n dx \quad (\text{wegen Beispiel } \a href="#">6.42) \\
 &= n|B^n| \\
 &= \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & \text{falls } n = 2k, \\ \frac{2\pi^k}{(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}}, & \text{falls } n = 2k+1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt eine Aufgabe aus Übungsserie 11 (Volumen des Einheitsballs) verwendet haben. Insbesondere erhalten wir

$$\text{Vol}_1(S^1) = \frac{2\pi^1}{(1-1)!} = 2\pi, \quad \text{Vol}_2(S^2) = \frac{2\pi^1}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Das stimmt mit den Resultaten der Beispiele [6.3](#), [6.27](#) und [6.33](#) überein. Wir stellen fest, dass

$$\text{Vol}_n(B^n) \rightarrow 0, \quad \text{Vol}_n(S^n) \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(Überlegen Sie sich das!)

**Bemerkung 6.46.** [strömungsmechanische Interpretation der Divergenz, Motivation für den Namen] Wegen des Satzes von Gauß besitzt Divergenz die folgende anschauliche strömungsmechanische Interpretation als die Anzahl Teilchen einer Flüssigkeit oder eines Gases, die pro Volumen und Zeitspanne aus einem “infinitesimalen Gebiet” herausfließen und daher in verschiedene Richtungen *divergieren*. Um das zu verstehen, betrachten wir eine stationärströmende Flüssigkeit. (Vergleiche mit Bemerkung [6.35\(iii\)](#).) Wir schreiben  $\rho(x)$  für die Teilchenzahldichte der Flüssigkeit im Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  und  $v(x)$  für ihren Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $x$ . Das Produkt von  $\rho$  und  $v$  ist ein Vektorfeld  $X := \rho v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Seien  $x_0 \in U_0$  und  $r \in (0, \infty)$ . Wir definieren  $U_r := B_r^3(x_0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|U_r|} \cdot \text{Anzahl Teilchen, die insgesamt pro Zeitspanne aus } U_r \text{ herausströmen} \\ &= \frac{1}{|U_r|} \int_{\partial U_r} X \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{siehe Abbildung } \a href="#">6.11) \\ &= \frac{1}{|U_r|} \int_{U_r} \nabla \cdot X \, dx \quad (\text{gemäß Satz } \a href="#">6.44) \\ &\rightarrow \nabla \cdot X(x_0) \quad \text{für } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Der intuitive Grund für diese Konvergenz ist, dass die Werte von  $X$  im Ball  $U_r$  “immer weniger von  $X(x_0)$  abweichen”, wenn  $r > 0$  kleiner wird. Anschaulich gilt daher:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot X(x_0) && (6.38) \\ &= \text{Divergenz von } X = \rho v \text{ im Punkt } x_0 \\ &= \text{Anzahl Teilchen, die pro Volumen und Zeitspanne aus einem “infinitesimalen Ball”} \\ & \quad \text{herausfließen, also in verschiedene Richtungen } \textit{divergieren} \end{aligned}$$

Das motiviert auch den Namen “Divergenz”. Falls die Divergenz in  $x_0$  positiv ist, dann strömt mehr Flüssigkeit oder Gas aus einem kleinen Ball um  $x_0$  heraus als hinein. Das passiert zum Beispiel, wenn sich Luft erwärmt. Wir können uns diese Divergenz von

Teilchen am Beispiel des Euler-Vektorfeldes  $X(x) := x$  und  $x_0 = 0$  veranschaulichen. (Zeichnen Sie dieses Vektorfeld! Vergleichen Sie mit Beispiel [6.42](#))

Wir nehmen jetzt an, dass die Flüssigkeit keine Quellen und Senken besitzt, d. h. nirgends entsteht oder verschwindet. Gemäss [\(6.38\)](#) gilt dann

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Des Weiteren nehmen wir an, dass die Flüssigkeit *inkompressibel* ist, d. h. nicht zusammengedrückt werden kann. Das bedeutet, dass  $\rho$  zeitlich und räumlich konstant ist. In diesem Fall gilt

$$\rho \nabla \cdot v = \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \text{also} \quad \nabla \cdot v = 0.$$

Die Divergenz des Geschwindigkeitsvektorfeldes einer inkompressiblen quellfreien Flüssigkeit verschwindet also. Eine solche Flüssigkeit ist zum Beispiel in guter Näherung durch Wasser gegeben, in dem keine chemischen Reaktionen stattfinden. Die Gleichung  $\nabla \cdot v = 0$  spielt in der Strömungslehre eine wichtige Rolle. Strömungslehre wird in den Vorlesungen des Studienganges RW *Fluiddynamik I* (4. Semester, Grundlagenfach) und *Fluiddynamik II* (5. Semester, Vertiefungsgebiet) behandelt.

Mit Hilfe des Satzes von Gauß sind wir jetzt im Stande, Satz [6.12](#) (Green) zu beweisen.

**Beweis des Satzes [6.12](#) (Green):** Seien  $U, X$  wie in diesem Satz vorausgesetzt. Wir bezeichnen mit  $T : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^2$  die positive Orientierung des Randes  $\partial U$  und mit  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^2$  die nach aussen weisende Koorientierung. Für jedes  $x \in \partial U$  ist  $T(x)$  gleich dem um  $\frac{\pi}{2}$  im Gegenuhrzeigersinn gedrehten Vektor  $\nu(x)$ , d. h.

$$T = (-\nu^2, \nu^1). \tag{6.39}$$

Das folgt aus den Definitionen von  $T$  und  $\nu$  mit Hilfe einer Submersion  $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $U$  lokal beschreibt. (Überlegen Sie sich das!) Wir definieren

$$Y := (X^2, -X^1) : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Das ist  $X$  um  $\frac{\pi}{2}$  im Uhrzeigersinn gedreht.  $Y$  ist ein  $C^1$ -Vektorfeld mit Divergenz

$$\nabla \cdot Y = D_1 X^2 - D_2 X^1 = \text{rot } X.$$

Aus Satz [6.44](#) (Gauß) folgt daher, dass

$$\begin{aligned} \int_U \operatorname{rot} X \, dx &= \int_U \nabla \cdot Y \, dx \\ &= \int_{\partial U} Y \cdot \nu \, ds \\ &= \int_{\partial U} (X^2 T^2 - X^1 (-T^1)) \, ds \quad (\text{wegen } \a href="#">6.39)) \\ &= \int_{\partial U} X \cdot T \, ds, \end{aligned}$$

wie behauptet. Das beweist Satz [6.12](#).  $\square$

Im folgenden Beispiel wenden wir den Satz von Gauß an, um aus einer der vier Maxwellgleichungen der Elektrodynamik das Gaußsche Gesetz herzuleiten.

**Beispiel 6.47.** [Maxwellgleichung, Gaußsches Gesetz, Satz von Gauß] Wir betrachten das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und die elektrische Ladungsdichte  $\rho$  als Funktionen des Ortes  $x \in \mathbb{R}^3$ . Wir schreiben

$$\varepsilon_0 := \text{elektrische Feldkonstante} \approx 8.9 \cdot 10^{-12} \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{sec}^4 \text{A}^2$$

Eine der vier Maxwellgleichungen besagt, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.40)$$

Das *Gaußsche Gesetz* besagt, dass der Fluss des elektrischen Feldes über den Rand eines Gebietes proportional zur Ladung im Gebiet ist. Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass  $\mathbf{E}$  von der Klasse  $C^1$  ist. Wir fixieren ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Wir schreiben  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^3$  für die nach aussen weisende Koorientierung des Randes  $\partial U$  und

$Q :=$  elektrische Ladung im Gebiet  $U$ .

Das Gaußsche Gesetz besagt, dass

$$\text{Fluss des elektrischen Feldes durch den Rand } \partial U = \int_{\partial U, \nu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (6.41)$$

Wir leiten dieses Gesetz aus der Maxwellgleichung [\(6.40\)](#) mittels des Satzes von Gauß

her: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial U, \nu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int_U \nabla \cdot \mathbf{E} \, dx && \text{(gemäss Satz 6.44, Gauß)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_U \rho \, dx && \text{(gemäss der Maxwellgleichung (6.40))} \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Das zeigt das Gaußsche Gesetz (6.41).

Das Gaußsche Gesetz ist also die *integrale* Form eines physikalischen Gesetzes, die Maxwellgleichung (6.40) ist die *differentielle* Form davon. Diese Gleichung in der Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen* ausführlich behandelt (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).

# Literaturverzeichnis

- [Bla96] Christian Blatter, *Ingenieur Analysis 2*, Springer, 1996.
- [DK04a] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Multidimensional real analysis. I. Differentiation*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 86, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. MR 2121976
- [DK04b] ———, *Multidimensional real analysis. II. Integration*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 87, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. MR 2121977
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354
- [Pap15] Lothar Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 2. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*, 14th revised and enlarged ed. ed., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015 (German).
- [Stra] Michael Struwe, *Analysis für informatik, skript, 2010, eth zürich*.
- [Strb] ———, *Analysis i und ii, skript, herbstsemester 2011/frühlingssemester 2012, eth zürich*.
- [Tes12] Gerald Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2961944