DISCLAIMER

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen. Es hat sicherlich ein paar drinnen.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Serie 1

Aufgabe 1

a)

$$F = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cdot \sin(\varphi) \quad \Big\| \; s = l\varphi$$

$$ml \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cdot \sin(\varphi) \quad \Big\| \; x << L \Rightarrow \text{kleine Auslenkungen} \Rightarrow \frac{d\varphi^2}{dt^2} \hat{=} -\frac{g}{L}\varphi$$

$$F_{Pendel} = -mg\varphi$$

$$F_{Feder} = -k_F x$$

$$F_{Ges} = F_{Pendel} + F_{Feder} = -mg\varphi - k_F x = -mg \cdot x/L - k_F x$$

$$\underline{\underline{m\ddot{x} + mg \cdot x/L + k_F x = 0}}$$

b)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad \| \; \text{Einsetzen in die Bewegungsgleichung}$$

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) - B \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad \| \; \text{Einsetzen in die Bewegungsgleichung}$$

$$-m \cdot \cancel{A}\omega^2 \cos(\omega t) - m \cdot \cancel{B}\omega^2 \sin(\omega t) + \cancel{mg} \cdot \frac{\cancel{A}\cos(\omega t) + \cancel{B}\sin(\omega t)}{\cancel{L}} + \cancel{k_F} \cdot \cancel{A}\cos(\omega t) + \cancel{B}\sin(\omega t) = 0$$

$$\left(-mA\omega^2 + \frac{mgA}{L} + k_F A\right) \cdot \cos(\omega t) + \left(-mB\omega^2 + \frac{mgB}{L} + k_F B\right) \sin(\omega t) = 0$$

$$\left(-mA\omega^2 + A \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F\right]\right) \cdot \cos(\omega t) + \left(-mB\omega^2 + B \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F B\right)\right. \sin(\omega t) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -mA\omega^2 + A \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F\right] = 0 \\ -mB\omega^2 + B \cdot \left[\frac{mg}{L} + k_F\right] = 0 \end{array}\right\}$$

sin(ωt) und cos(ωt) können nicht 0 sein, da die Gleichung für ∀t gelten muss.

$$A \cdot \left(-m\omega^2 + \left[\frac{mg}{L} + k_F\right]\right) = 0$$

‖ A kann nicht 0 sein, da die Gleichung $x(0) = B \cdot \sin(\omega t)$ nicht gilt. (Anfangsbedingung!)

$$-m\omega^2 + \left[\frac{mg}{L} + k_F\right] = 0$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{\frac{mg}{L} + k_F}{m}}}}$$

‖ Anfangsbedingungen! $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A$ und B

$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k_F}{m}}}}$$

Aufgabe 1

c) $T_{Pendel} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2$

$L = \frac{g}{\pi^2}$

$T_{Ges} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L} + k_F}} = 1$

$1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\frac{g}{\pi^2}} + k_F}}$

$\frac{1}{4\pi^2} = \frac{m}{\frac{mg}{\frac{g}{\pi^2}} + k_F}$

$\frac{1}{4\pi^2} = \frac{m}{m\pi^2 + k_F}$

$4\pi^2 = \frac{m\pi^2 + k_F}{m}$

$k_F = 4\pi^2 m - m\pi^2 = 3\pi^2$

$\underline{\underline{k_F = 29.61 \frac{N}{M}}}$ ✓

Aufgabe 2

a) $U_c + U_L = 0$

$I = \frac{dQ}{dt}$ || in Gleichung einsetzen

$\frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d\left(+\frac{dQ}{dt}\right)}{dt} = 0$ || I ist negativ weil der Strom aus dem Kondensator fliest. => Stimmt nicht, ist positiv

$\frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d^2Q}{dt} = 0$

$\underline{\underline{-L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0}}$ $\underline{\underline{L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0}}$

b) $L = -mg$

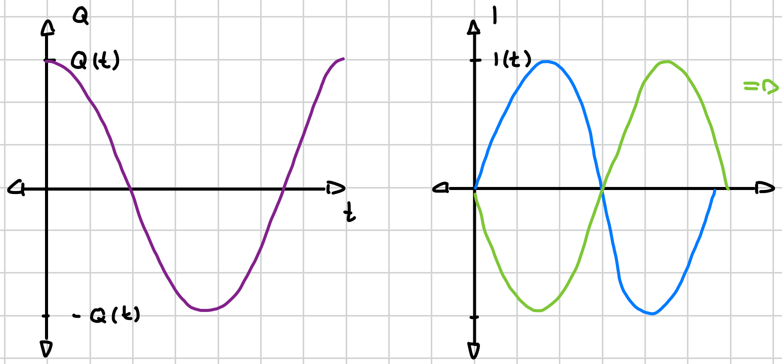
$\frac{1}{C} = \frac{mg}{L} + k_F$

$Q = x$

$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega t)$ || Gleichung für die allgemeine harmonische Schwingung

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -\dot{Q}(t) = -Q_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

c)



$\Rightarrow -\sin(\omega t)$

Aufgabe 3

a) $F_{Links} - F_{Rechts} = F_{Ges}$ || F_{Rechts} ist negativ, da F_{Rechts} gegen F_{Links} wirkt.

$$\pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \left(h_0 + \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g - \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \left(h_0 - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g = m \cdot \ddot{h}$$

$$m\ddot{h} - \pi R^2 \rho \cdot \left(\cancel{h_0} + \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g + \pi R^2 \rho \cdot \left(\cancel{h_0} - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot g = 0$$

$$m\ddot{h} - \cancel{2}\pi R^2 \rho \frac{\Delta h}{\cancel{2}} g = 0$$

$$\underline{\underline{m\ddot{h} - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0}}$$ || da $m = \rho V \Rightarrow \ddot{h} = -\frac{g}{h_0} h$

$h(t) = \frac{\Delta h}{2} \cdot \cos(\omega t)$ || Allgemeine Gleichung einer harmonischen Schwingung

$$\dot{h}(t) = -\frac{\Delta h}{2} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

$\ddot{h}(t) = -\frac{\Delta h}{2} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$ || Einsetzen in Bewegungsgleichung

$-m \cdot \frac{\Delta h}{2} \omega^2 \cos(\omega t) - \pi R^2 \rho \Delta h = 0$ || $\omega = 2\pi / T$

$$-m \frac{\Delta h}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

$$-\cancel{2} \pi R^2 \rho h_0 \cdot \frac{\Delta h}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

$$-\pi R^2 \rho h_0 \Delta h \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \pi R^2 \rho \Delta h g = 0$$

Wenn $h(t) = 0$ dann ist entweder Δh oder $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0$ || Keine Ahnung ob das stimmt

$$-\pi R^2 \rho h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} - \pi R^2 \rho g = 0$$

$$\pi R^2 \rho \left(h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} + g\right) = 0$$ || $\pi R^2 \rho$ kann nicht 0 sein

$$h_0 \frac{4\pi^2}{T^2} + g = 0$$

$$h_0 = -\frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = -0.1\,m$$

Die höhe ist negativ da wir die Oberfläche der Flüssigkeit während dem Gleichgewicht als 0-Punkt betrachten.

b) $\frac{\Delta h^*}{2} = 0.0015\,m = h(t)$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$h(t) = \pm\frac{\Delta h}{2} \cdot \cos(wt)$$ || $\pm \frac{\Delta h}{2} \Rightarrow 2$ Ergebnisse

$$t = \frac{\arccos\left(\frac{2h(t)}{\pm\Delta h}\right)}{w} = 0.14\,s \;/\; 0.17\,s$$ (Peiodisch!)

Serie 2

→ Fragen

→ Notizen

Aufgabe 1

a)

$$\nu_0 = \frac{1}{T}$$

‖ $T \sim 0.95s$ (Sollte man das vom Graph abschätzen ?)

$$\nu_0 = \frac{1}{0.95} = 1.05\,Hz$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cdot \cancel{\cos(\omega t)}$$

‖ Allgemeine Gleichung für harmonische Schwingungen mit schwacher Dämpfung ; $A = 0.4$; bei Amplituden ist $\cos(\omega t) = 1$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}$$

‖ $t = 1.95s \rightarrow x(t) = 0.1m$

$$0.1 = 0.4 \cdot e^{-1.95\gamma}$$

$$\ln(0.25) = -1.95\gamma$$

$$-m \cdot \frac{\ln(0.25)}{1.95} = b = 0.427$$

‖ Verbesserung für Serie, bitte einheitlich. Entweder d oder b

$$\omega_0 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

‖ Kann man $\omega = \omega_0$ behaupten?

$$k = \omega_0^2 m$$

$$\omega_0 = \nu_0 \cdot 2\pi = 1.05 \cdot 2\pi = 6.60$$

$$k = 6.60^2 \cdot 0.6 = 26.1$$

$$Q = \omega_0 \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{b} = \frac{0.6}{0.427} = 1.41$$

$$Q = 6.60 \cdot 1.41 = 9.28$$

b)

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X_0 \cdot \cos(\Omega t)$$

‖ Gleichung für harmonische Schwingung im Gleichgewicht.

$$\dot{x}(t) = -X_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -X_0 \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t)$$

$$-m \cdot X_0\Omega^2\cos(\Omega t) - b \cdot X_0\Omega\sin(\Omega t) + k \cdot X_0\cos(\Omega t) = F_0\cos(\Omega t)$$

$$(kX_0 - mX_0\Omega^2)\cos(\Omega t) - \cancel{bX_0\Omega\sin(\Omega t)} = F_0\cos(\Omega t)$$

‖ Da das Endresultat nicht von $\sin(\Omega t)$ abhängt, muss es 0 sein

$$\Rightarrow F_0 = kX_0 - mX_0\Omega^2$$

Aufgabe 1

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0}{kX_0 - mX_0}} = \sqrt{\frac{0.5}{26.1 \cdot 0.08 - 0.6 \cdot 0.08}} = 0.495$$

c) $$\delta = \arctan\left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad \Big\| \quad \gamma = \frac{b}{m} = 0.427$$

$$= \arctan\left(\frac{-0.427 \cdot 0.495}{6.6^2 - 0.495^2}\right) = -0.299^\circ$$

Aufgabe 2

a) $$\ddot{x}_1(t) = -\omega_0^2 x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1)$$

b) $$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_2 \\ z_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\ x_2 &= \frac{z_2 - z_1}{2} \end{aligned}$$

einsetzen

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{k}{m}\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_2 - z_1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{k}{m} z_1$$

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} - \frac{k}{m}\left(\frac{z_2 - z_1}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Addieren oder subtrahieren

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = -\omega_0^2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{k}{m} z_1$$

Addition: $\ddot{z}_2 = -\omega_0^2 z_2$

Subtraktion: $\ddot{z}_1 = -\omega_0^2 z_1 - 2\frac{k}{m} z_1$

c) $z_1 = 0 \quad \| \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow x_1(0) = x_2(0) \rightarrow$ Beide Pendeln sind zu jeden Zeitpunkt an der gleichen Position. Daraus folgt, dass die Kreisfrequenz gleich ist. $\omega = \omega_0$

$z_2 = 0 \quad \| \Rightarrow x_1 = -x_2$

$\Rightarrow x_1(0) = -x_2(0) \rightarrow$ Die Positionen der Pendel ist unterschiedlich

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}$$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 ist sehr assozial ü

a) $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ || Hätte ich hier auch nur mit Variablen rechnen sollen?

$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$

$k_{eff} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3}$

$I = \frac{H^3 W}{12} = \frac{(200 \cdot 10^{-9})^3 \cdot (50 \cdot 10^{-6})}{12} = 3.33 \cdot 10^{-26}$

$k_{eff} = \frac{3 \cdot 170 \cdot 10^9 \cdot 3.33 \cdot 10^{-26}}{(120 \cdot 10^{-6})^3} = 9.84 \cdot 10^{-3}$

$m_0 = \rho \cdot L \cdot W \cdot H = 2320 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-9} = 2.78 \cdot 10^{-12}$

$m_{eff} = \frac{3}{16} m_0 = \frac{3}{16} 2.78 \cdot 10^{-12} = 5.22 \cdot 10^{-13}$

$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{9.84 \cdot 10^{-3}}{5.22 \cdot 10^{-13}}} = 137060$

$$\underline{\underline{\nu = \frac{137060}{2\pi} = 21800\,Hz}}$$

$$\underline{\underline{L = \frac{g}{4\pi^2 \nu^2} = \frac{9.81}{4 \cdot \pi^2 \cdot (21800)^2} = 0.521\,nm}}$$

b) $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{3/16\, m_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{16 k_{eff}}{3 m_0}}$

$\Rightarrow \nu = \frac{c}{\sqrt{m}}$ mit $c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{16 k_{eff}}{3}}$

Taylorreihe:

$\nu(m_0 + \Delta m_0) \approx \nu(m_0) + \left(\frac{d\nu}{dm}\right)_{m_0} \cdot \Delta m_0$

$\frac{d\nu}{dm} = -\frac{c}{2} \cdot m^{-3/2}$

$\Rightarrow \left(\frac{d\nu}{dm}\right)_{m_0} = -\frac{c}{2} \cdot m_0^{-3/2}$

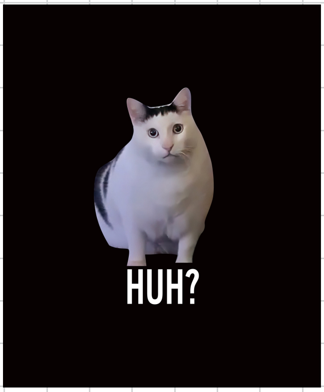
$\Delta\nu = \nu(m_0 + \Delta m_0) - \nu(m_0)$ || Approximation einsetzen

Aufgabe 3

$$\Delta V = \left(\frac{dV}{dm}\right)_{m_0} \cdot \Delta m_0$$

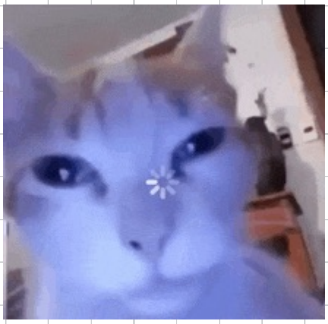
$$\Delta m_0 = -\frac{2}{C \cdot m_0^{-3/2}} \cdot \Delta V$$

$$= -\frac{4\pi}{\sqrt{\frac{16 k_{eff}}{3}} \cdot m_0^{-3/2}} \cdot \Delta V$$



Kommt das an der Prüfung?

c) Ich habe kein Plan...



Serie 3

Aufgabe 1

a)

$$v = \sqrt{\frac{F_s}{\mu}} = \sqrt{\frac{90}{0.25}} = \sqrt{360}\ ms^{-1}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{120}{1} = 120\ Hz$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Big\| \quad k = \frac{\omega}{v}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}} = \frac{v}{f} = \frac{18.9}{120} = 1.58 \cdot 10^{-1}\ m$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.58 \cdot 10^{-1}} = 6.33$$

$$A_0 = \frac{50}{2} = 25\ cm = 0.25\ m$$

b)

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \sin(kx - kvt) \quad \| \quad \omega = 2\pi \cdot 120 = 240\pi$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\xi_0 \cdot -kv \cdot \cos(kx - kvt)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial t^2} = -\xi_0 \cdot (kv)^2 \cdot \sin(kx - kvt)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_0 \cdot k \cdot \cos(kx - kvt)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = -\xi_0 \cdot k^2 \cdot \sin(kx - kvt)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}$$

$$-\xi_0 \cdot (kv)^2 \cdot \sin(kx - kvt) = v^2 \left(-\xi_0 \cdot k^2 \cdot \sin(kx - kvt)\right)$$

c)

$$\sin(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0, \pi$$

Aufgabe 2

a) $\Delta u = -L' dx \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$ || Negativ → Lenzsche Regel

$\Delta u = U(x+dx,t) - U(x,t)$

$\Rightarrow U(x+dx,t) - U(x,t) = -L' dx \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$ || durch dx dividieren und $dx \to 0$ damit wir die charakteristische Gleichung

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial x} = -L' \cdot \frac{\partial I}{\partial t}}}$$

$\Delta I = C' dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$

$\Delta I = I(x,t) - I(x+dx,t)$

$\Rightarrow I(x,t) - I(x+dx,t) = C' dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$ || durch dx dividieren und $dx \to 0$ wie oben

$$\underline{\underline{-\frac{\partial I}{\partial x} = C' \frac{\partial u}{\partial t}}}$$

Telegraphengleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L' \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = -L' \frac{\partial I}{\partial t}$

$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = -L' \frac{\partial I^2}{\partial t \partial x}$ || Abgeleitet nach x

$\frac{\partial u^2}{\partial x \partial t} = -L' \frac{\partial I^2}{\partial t^2}$ || Abgeleitet nach t

$\frac{\partial I}{\partial x} = -C' \frac{\partial u}{\partial t}$

$\frac{\partial I^2}{\partial x \partial t} = -C' \frac{\partial u^2}{\partial t^2}$ || Abgeleitet nach t

$\frac{\partial I^2}{\partial x^2} = -C' \frac{\partial u^2}{\partial t \partial x}$ || Abgeleitet nach x

$$\underline{\underline{\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = C'L' \frac{\partial u^2}{\partial t^2}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial I^2}{\partial x^2} = C'L' \frac{\partial I^2}{\partial t^2}}}$$

c) $\frac{\partial \xi^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{1}{L'C'} \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \Rightarrow$ NUS || Berechnung Frequenz Spannungs/Stromquelle

Aufgabe 3

a) $v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\quad \Big\| \quad E = \frac{\sigma l}{\Delta l}$

$v_l = \sqrt{\frac{\sigma l}{\Delta l \rho}}$ $\quad \Big\| \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{lA}$

$v_l = \sqrt{\frac{\sigma l^2 A}{\Delta l m}}$ $\quad \Big\|$ Rückstellkraft $F_R = \sigma A$

$v_l = \sqrt{\frac{F_R l^2}{\Delta l m}}$ $\quad \Big\| \quad \frac{F_R}{\Delta l} = k$

$v_l = l \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\square$

b) $F_R = k(l - l_0)$ $\quad \| \quad l_0 \to 0$

$F_l \approx kl$

$v_t = \sqrt{\frac{F_R}{\mu}}$ $\quad \Big\| \quad \mu = \frac{m}{l}$ → Wurde nicht in der Vorlesung besprochen glaube ich ä

$v_t = \sqrt{\frac{kl^2}{m}} = l\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\square$

Wenn $l \gg l_0$ dann ist $v_t = v_l$. Ist $l > l_0$, so ist die $v_l \gg v_t$.