Analysis I

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis I (HS24) von F. Ziltener und dem Skript Änalysis für Informatik"von Michael Struwe.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Teil I

Analysis I

Kapitel 1

Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

1.1 Logik

1.1.1 Grundlagen

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. [Ziltner, 2024] (Wahr oder Falsch).

In der mathematischen Logik gelten die folgenden Sätze.

- **Satz vom ausgeschlossenen Wiederspruch:** Eine Aussage ist nicht sowohl war als auch falsch.
- **Satz vom ausgeschlossenen Dritten:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

[Ziltner, 2024]

Bemerkung:-

Es gibt gewisse Aussagen, als logische Aussage gelten könnte aber nicht zulässig ist. Solche Aussagen sind meisten rückbezügliche Äusserungen und sind deswegen keine sinnvollen Aussagen. (Siehe Lügner-Paradox)

Aussagen können verneint und miteinander verknüpft werden.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
T	wahr	
F	falsch	
$\neg A$	nicht A	Negation

Für Verknüpfungen verwenden wir folgende Notationen.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	inklusive Disjunktion
$A \dot{\vee} B$	entweder A oder B	exklusive Disjunktion
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	genau dann A, wenn B	Äquivalenz

Die Wahrheitstabelle der vorher erwähnten Verknüpfungen sind wie folgt.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

Aus der Tabelle kann man die Zusammenhänge der Verknüpfungen erkennen.

Bemerkung:-

Wir unterscheiden zwischen dem inklusiven Oder und dem exklusiven Oder. Beim inklusiven Oder können beide Aussagen warh sein während beim exklusiven oder nur einer der beiden Aussagen wahr sein kann.

Bemerkung:-

Verknüpfende Aussagen brauchen inhaltlich nicht zusammenzuhängen.

1.1.2 Äquivalenz

Theorie 1.1.1 Äquivalenz

Seien P und Q Aussagen. Wenn P und Q die gleichen Aussagen haben, so nennen wir sie logisch Äquivalent.

$$P \equiv Q \tag{1.1}$$

Sobald 2 Aussagen äquivalent sind, so ist ihre Implikation, sowie ihr Kontraponiertes logisch äquivalent.

Theorie 1.1.2 Kontraponiertes

Das Kontraponierte zur Implikation $A \Rightarrow B$ ist

$$\neg B \Rightarrow \neg A \tag{1.2}$$

Dabei gilt

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist nur wahr, wenn die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind.

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

1.1.3 Axiome, Sätze und Beweise

In der Mathematik sind Axiome von grosser Bedeutung. Sie sind das Fundament der Mathematik. In der Analysis werden wir jedoch Sätze verwenden, welche durch Axiome bewiesen worden sind.

Um Aussagen zu Beweisen, verwenden wir in der Logik den Modus Ponens.

Definition 1.1.1: Modus Ponens

Ein Beweis einer Aussage A ist eine sukzessive Herleitung von A aus dem Axiomen, in der logische Schlussregeln angewendet werden. Eine solche Regel ist der Modus Ponens.

$$\begin{array}{c} A \\ A \Rightarrow B \\ \hline \text{B} \end{array}$$

A ist die Prämise, B die Konklusion.

Aus dem Modus Ponens können wir schliessen, dass wenn A und $A \Rightarrow B$ gilt, so gilt B. Der Modus Ponens ist die Basis eines Beweises. Wir werden später sehen, dass wir den Modus Ponens im Hintergrund verwenden.

Bemerkung:-

Wir können auch Beweise durchführen durch die Kontraposition.

In der Analysis werden wir auch mit indirekten Beweisen arbeiten. Dabei nehmen wir an, dass eine Aussage falsch ist, woraus wir eine falsche Aussage herleiten. Dies nennen wir auch den Beweis mittels Widerspruch. Es lohnt sich aber oft, einen Widerspruchsbeweis als direkten Beweis umzuschreiben, da aus eine falsche oder einer wahren Aussage eine beliebige wahre Aussage hergeleitet werden kann.

Theorie 1.1.3 Prinzip der vollständigen Induktion

Nehmen wir an das die Funktion $P(0)$ gilt. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Grundlagen

Eine Menge ist eine ungeordnete Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die in einer Menge enthaltenen Objekte nennen wir ihre Elemente. [Ziltner, 2024]

Theorie 1.2.1 Schreibweise einer Menge

Nehmen wir an, dass $x_1, x_2, \ldots x_n$ Elemente sind. Dann ist die Menge, bestehend aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\{x_1, x_2, \ldots x_n\}.$$

Beispiel 1.2.1

- $\{1, 0\}$
- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$

Bemerkung:-

Mengen können wiederholende Elemente besitzen.

Definition 1.2.1: Beschreibende Mengenschreibweise

Die beschreibende Mengenschreibweise ist eine Aussageform, welche Elemente x definiert, die in einer Menge enthalten sein können und eine Bedingung $P(x)$ erfüllen.

$$\{x|P(x)\}\text{Für die Menge aller } x \text{, für die } P(x) \text{ gilt.} \tag{1.3}$$

Beispiel 1.2.2

- $\{n|n \in \mathbb{N}_0 : n \text{ ist gerade}\}$

1.2.2 Mengenoperationen und Teilmengenrelation

Wie in Kapitel 1.1 haben Mengen auch Logikoperationen. Sie sind sehr ähnlich zu den normalenLogikoperationen.

$A \cup B$	$\{x\|x \in A \wedge x \in B\}$ = Durchschnitt
$A \cap B$	$\{x\|x \in A \vee x \in B\}$ = Vereinigung
$A \setminus B$	$\{x \in A\|x \notin B\}$ = Differenz

Wenn die Menge A auch in der Menge B liegt, so ist A eine Teilmenge von B.

$$A \subseteq B.$$

Theorie 1.2.2 Das Komplementär einer Menge

Das Komplementär einer Menge definiert eine Menge A, welche die Elemente einer anderen Menge B nicht beinhaltet.

$$B^{\complement} = A \setminus B.$$

Theorie 1.2.3 De-Morganschen Gesetze

- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

Theorie 1.2.4 Tupel

Wenn wir eine Liste von Elementen, bestehen aus $x_1, \ldots, x_n$ haben, so nennen wir diese Liste ein Tupel. Die Anzahl von Elementen n sowie die Anordnung der Elementen spielt eine Rolle.

- Für $n = 2$ nennen wir den Tupel ein Paar.
- Für $n = 3$ nennen wir den Tupel ein Trippel.
- Für alle anderen n bezeichnet man die Liste als n-Tupel.

Wie schon vorher erwähnt spielt die Anordung eine grosse Rolle. ($(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$)

Theorie 1.2.5 Karthesisches Produkt

Das Produkt zweier Mengen (*karthesische Produkt*) X und Y kann als eine Menge bestehend aus den Permutationen den Elementen der beiden Mengen dargestellt werden.

Beispiel 1.2.3 (Karthesisches Produkt)

Sei $X := \{0, 1\}$ und $Y := \{\text{Apfel}, \text{Berg}\}$.

$$X \times Y = \{(0, \text{Apfel}), (0, \text{Berg}), (1, \text{Apfel}), (1, \text{Berg})\}.$$

Bemerkung:-

Für Potenzen gilt das gleiche Prinzip, i.e $X^2 = X \times X$, $X^3 = (X \times X) \times X$, usw.

Definition 1.2.2: Euklidische Norm

Die euklidische Norm $||\cdot||$ ist die Distanz von einem Punkt, z.B. v zu ihrem Ursprung und wird wie folgt berechnet.

$$||v|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Theorie 1.2.6 Offener und abgeschlossener Ball, Sphäre

E in Ball oder eine Sphäre ist eine Menge von Punkten in einen n-Dimensionalen Raum, welche einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt des Balles bzw. der Sphäre haben.

1. Der offene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner als der Radius r ist.

$$B_r(x_0) := B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| < r\}.$$

2. Der abgeschlossene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner oder gleich dem Radius ist.

$$\bar{B}_r(x_0) := \bar{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| \leqslant r\}.$$

3. Die Sphäre ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 gleich dem Radius ist.

$$S_r^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| = r\}.$$

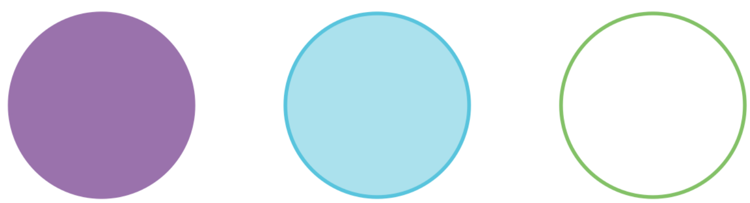

Abbildung 1.1: Von links nach rechts: Offener Ball, abgeschlossener Ball, Sphäre

Bemerkung:-

Das die Sphäre eine Dimension verliert $(n-1)$ ist auf dem ersten Blick verwirrend, macht aber Sinn. Bei einer Sphäre wird nur der Mantel betrachtet. Dadurch wird der Freiheitsgrad verringert was dazu führt, dass eine Dimension verloren geht i.e. der Mantel einer Kugel ist eine Fläche oder der Rand einer Kreisscheibe ist eine Linie.

Theorie 1.2.7 Fall $r = 0$ und $r = \infty$

Falls $r = 0$ gilt für den Ball

- $B_0(x_0) = \emptyset$ da die euklidische Norm nicht kleiner als 0 sein kann
- $\bar{B}_0(x_0) = \{x_0\}$ da der einzige Punkt dessen Abstand zum Mittelpunkt null ist der Mittelpunkt selbst ist.

Falls $r = \infty$, dann gilt

- $B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$
- $\bar{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$

Bemerkung:-

Obwohl $\mathbb{R}^n$ ein offener und auch ein geschlossener Ball sein kann bedeutet es nicht, dass $B_\infty(x_0) = \bar{B}_\infty(x_0)$ ist. Das Problem ist, dass kein Rand existiert für einen Kreis mit $r = \infty$. Deshalb ist $\mathbb{R}^n$ beides.

1.3 Quantoren

Quantoren sind logische Operatoren, die angeben, wie viele Objekte x eine Bedingung $P(x)$ erfüllen. Die zwei wichtigsten Quantoren sind die folgenden: [Ziltner, 2024]

Notation	Bedeutung	Beziehung
$\forall$	für jedes- für alle”	Allquantor
$\exists$	ës gibt”	Existenzquantor

[Ziltner, 2024]

Beispiel 1.3.1 (Quantoren)

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 0$ ist Wahr

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n > 0$ ist Wahr

(iii) $\forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant n$ ist Wahr

(iv) $\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant n$ ist Falsch

Bemerkung:-

Die Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle. Dies können wir an den vorheringen Beispielen erkennen.

Theorie 1.3.1 Verneinung einer quantifizierten Assageform

Die Verneinung von den Quantoren $\forall$ und $\exists$ ist wie folgt definiert.

$$\neg(\forall x \in X : P(x)) \equiv \exists x \in X : \neg P(x).$$
$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \equiv \forall x \in X : \neg P(x).$$

1.4 Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion (oder Abbildung) von X nach Y eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $y \in Y$ zuordnet. [Ziltner, 2024]

Definition 1.4.1: Funktion

Eine Funktion (oder Abbildung) ist ein Tripel

$$f = (X, Y, G),$$

wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, sodass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, sodass $(x, y) \in G$.
[Ziltner, 2024]

Definition 1.4.2: Definitionsbereich, Zielbereich, Graph, Wert in einem Punkt

Für die Funktion f haben wir folgende Definitonen um die Eigenschaften einer Funktion zu definieren.

- dom f := dom(f) := Definitionsbereich von f := X Der Definitonsbereich sind die Werte von x, welche für diese Funktion erlaubt sind.
- codom f := codom(f) := Zielbereich von f := Y Der Zielbereich sind die Werte von y, welche für diese Funktion erlaubt sind.
- Graph von f := G
- Wert von f an der Stelle $x \in X := f(x) := y$
- $f : X \to Y :=$ "dom $f = X$und codom $f = Y$"

Definition 1.4.3: Bild

Das Bild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen codom(f) beinhaltet (im$(f) \subseteq$ codom(f)).

$$f(A) := \{f(x) | x \in A\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge A, welches eine Teilmenge von X ist, auf f verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von Y.

Definition 1.4.4: Urbild

Das Urbild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen dom(f) beinhaltet ($f^{-1} \subseteq$ dom(f))

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge B, welches eine Teilmenge von Y ist, auf die Inverse von f (f^{-1}) verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von X.

Wir werden nun weitere Eigenschaften von Funktionen kennenlernen: Die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Definition 1.4.5: Injektiv

Eine Funktion ist injektiv wenn

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von X nicht dasselbe Resultat ausgibt, wenn das Element in die Funktion eingesetzt wird.

Definition 1.4.6: Surjektiv

Eine Funktion ist surjektiv wenn

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von Y durch ein Element von X zugeordent ist. Dabei kann ein Element von X auch mehrere Elemente von Y zugeordnet sein.

Definition 1.4.7: Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv wenn sie injektiv und surjektiv ist. Mathematisch bedeutet dies

$$(\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \wedge (\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y).$$

Beispiel 1.4.1 (injektiv, surjektiv, bijektiv [Ziltner, 2024])

- Die Identität id_x ist bijektiv
- Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) := x$, ist injektiv und nicht surjektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), f(x) := x^2$, sit nicht injektiv, aber surjektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.

Bemerkung:-

Die Identität ist eine Funktion welches sich selber wieder ausgibt.

$$f(x) = x.$$

Definition 1.4.8: Umkehrfunktion / Inverse

Die Umkehrfunktion oder Inverse einer Funktion ist eine Funktion, welches das Gegenteil der Ursprünglichen Funktion f macht.

$$f^{(-1)} : Y \to X, f^{(-1)}(y) := x.$$

In anderen Worten: wenn man ein Element von X in die Funktion einsetzt, so bekommt man ein Element von Y. Wichtig zu erwähnen ist, dass eine Inverse nur existiert, wenn die Funktion bijektiv ist.

Beispiel 1.4.2 (Umkehrfunktion / Inverse [Ziltner, 2024])

- Die Umkehrfunktion der Identität id_x ist $\mathrm{id}_x^{-1} = \mathrm{id}_x$.
- Die Funktion $f : [0, \infty), f(x) := x^2$, ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{\ } := f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$.
- Die Exponentialfunktion exp als Funktion von $X := \mathbb{R}$ nach $Y := (0, \infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Definition 1.4.9: Verknüpfung von Funktionen

Die Verknüpfung von Funktion ist wie folgt definiert.

$$g \circ f : X \to Z, g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Dies bdeuetet nichts weiter, dass der $\mathrm{codom}(f)$ in die Funktion g eingesetzt wird, und ELemente von Z dabei herauskommen.
Wichtig zu erwähnen ist, dass die $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ ist weil sonst die Verknüpfung nicht funktionieren würde.

Beispiel 1.4.3 (Verknüpfung, Reihenfolge davon [Ziltner, 2024])

- Wir betrachten $X := Y := Z$ und die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x + 1, g(y) := y^2.$$

Die Verknüpfung von f und g ist gegeben durch

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \circ f(x) = (x + 1)^2.$$

Der Zielbereich von g ist gleich $\mathbb{R}$. Das stimmt mit dem Definitionsbereich von f überein. Daher ist die umgekehrte Verknüpfung ebenfalls sinnvoll. Sie ist gegeben durch

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \circ g(y) = y^2 + 1.$$

In diesem Beispiel gilt daher

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

- Wir betrachten $X := \mathbb{R}^2, Y := Z := \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := x + y, g := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Die Verknüpfung von f und g ist gegeben durch

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g \circ f(x, y) = \exp(x + y) = e^{x+y}.$$

Die umgekehrte Verknüpfung $f \circ g$ ist nicht wohldefiniert (= sinnvoll), da der Yielbereich von g, also $\mathbb{R}$, nivcht gleich dem Definitionsbereich von f, also $\mathbb{R}^2$, ist.

Kapitel 2

Zahlen und Vektoren

Kapitel 3

Folgen und Reihen

Kapitel 4

Stetigkeit, Topologie

Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $x_0, f(x_0)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0)$ und $(x, f(x))$ für x gegen x_0. Ableitungen sind allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

5.1 Differential und Differentiationsregeln

Bemerkung:-

$$dx \text{ und } dy \text{ sind Differentialen. } \Rightarrow f'(x_0) = \frac{dy}{dx}, dx \text{ nennt man Differentialquotient..}$$

Bemerkung:-

Je kleiner Δx ist, desto näher kommt es an den Wert von Δy für:

$$\Delta y \equiv f'(x_0)\Delta x.$$

Beispiel 5.1.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2, f'(x_0 = 0) = 0.$$

Bemerkung:-

Die Menge U ist offen, da f stetig ist. Dies folgt aus dem Fakt, da das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist $\forall V$ offen.

5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

Bemerkung:-

Für

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

gilt, dass a die Steigung der Sekante ist.

Bemerkung:-

$\Rightarrow$ Die Funktion hat genau eine Lösung, die auch nach $f(0) = y_0$ erfüllt, mit $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, nämlich $f(x) = ye^{cx}$.

Beispiel 5.2.1

$$\frac{x^n}{e^{(x^n)}}?.$$

$$\frac{n \cdot x^{n-1}}{e^{(x^n)}} = \frac{e^x - 1}{x} = \exp(0) = 1.$$

Kapitel 6

Integration

Teil II

Analysis II

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

Kapitel 8

Topologie, Stetigkeit

Kapitel 9

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Kapitel 10

Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

Kapitel 11

Mehrdimensionale Riemann-integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

Kapitel 12

Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss

12.1 Satz von Green

Bemerkung:-

Der intrinsische Rand ist nicht dasselbe wie der topologische Rand. Wenn wir einen Halbkreis in einem Raum betrachten, so ist der topologische Rand die Gerade des Halbkreises, sowie die gebogene Gerade. Der intrinsische Rand betrachtet nur die Gerade.

Bemerkung:-

rot X ist eine stetige Funktion. Was dies besagt ist, dass wenn das Intervall x_j immer kleiner gewählt wird, so kommt man immer näher an den Mittelwert der Funktion.

Bemerkung:-

C^k Einbettung, weil wir dadurch die Topologie beibehalten. Ohne der Einbettung würden wir die Form abändern.

Bemerkung:-

Der Einheitsnormalvektorfeld beschreibt, wie die Fläche eines Körper orientiert ist. Wenn wir an jedem Punkt eines Körpers eine Tangentialfläche projezieren und an jeder Tangentialfläche einen Normalvektor hinzufügen, so bilden wir den Einheitsnormalvektorfeld. Die Koorentierung sorgt einfach dafür, dass der Einheitsnormalvektor nach aussen zeigt.

Literaturverzeichnis

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.

[Ziltner, 2024] Ziltner, Prof. Dr., F. (2024). Notizen zur Vorlesung Analysis 1 für ITET und RW, Herbstsemester 2024.