# Analysis I

Jirayu Ruh

# Inhaltsverzeichnis

# DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis I (HS24) von F. Ziltener und dem Skript Änalysis für Informatik"von Michael Struwe.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [The Manim Community Developers, 2024] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

# Teil I

# Analysis I

# Kapitel 1

# Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

## 1.1 Logik

### 1.1.1 Grundlagen

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. [Ziltner, 2024] (wahr oder falsch).

In der mathematischen Logik gelten die folgenden Sätze.

- **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:** Eine Aussage ist nicht sowohl war als auch falsch.
- **Satz vom ausgeschlossenen Dritten:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

[Ziltner, 2024]

**Bemerkung:-**

Es gibt gewisse Aussagen, als logische Aussage gelten könnte aber nicht zulässig ist. Solche Aussagen sind meisten rückbezügliche Äusserungen und sind deswegen keine sinnvollen Aussagen. (Siehe Lügner-Paradox)

Aussagen können verneint und miteinander verknüpft werden.

| Notation | Bedeutung | Bezeichnung |
|---|---|---|
| T | wahr | |
| F | falsch | |
| $\neg A$ | nicht A | Negation |

Für Verknüpfungen verwenden wir folgende Notationen.

| Notation | Bedeutung | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $A$ und $B$ | Konjunktion |
| $A \vee B$ | $A$ oder $B$ | inklusive Disjunktion |
| $A \dot{\vee} B$ | entweder $A$ oder $B$ | exklusive Disjunktion |
| $A \Rightarrow B$ | wenn $A$, dann $B$ | Implikation |
| $A \Leftrightarrow B$ | genau dann $A$, wenn $B$ | Äquivalenz |

Die Wahrheitstabelle der vorher erwähnten Verknüpfungen ist wie folgt.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \dot{\vee} B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T | T | F |
| T | F | F | T | T | F | F |
| T | T | T | T | F | T | T |

Aus der Tabelle kann man die Zusammenhänge der Verknüpfungen erkennen.

**Bemerkung:-**

Wir unterscheiden zwischen dem inklusiven Oder und dem exklusiven Oder. Beim inklusiven Oder können beide Aussagen wahr sein während beim exklusiven oder nur einer der beiden Aussagen wahr sein kann.

**Bemerkung:-**

Verknüpfende Aussagen brauchen inhaltlich nicht zusammenzuhängen.

### 1.1.2 Äquivalenz

**Theorie 1.1.1** Äquivalenz

Seien $P$ und $Q$ Aussagen. Wenn $P$ und $Q$ die gleichen Aussagen haben, so nennen wir sie logisch Äquivalent.

$$P \equiv Q \tag{1.1}$$

Sobald 2 Aussagen äquivalent sind, so ist ihre Implikation, sowie ihr Kontraponiertes logisch äquivalent.

**Theorie 1.1.2** Kontraponiertes

Das Kontraponierte zur Implikation $A \Rightarrow B$ ist

$$\neg B \Rightarrow \neg A \tag{1.2}$$

Dabei gilt

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist nur wahr, wenn die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind.

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

### 1.1.3 Axiome, Sätze und Beweise

In der Mathematik sind Axiome von grosser Bedeutung. Sie sind das Fundament der Mathematik. In der Analysis werden wir jedoch Sätze verwenden, welche durch Axiome bewiesen worden sind.

Um Aussagen zu Beweisen, verwenden wir in der Logik den Modus Ponens.

**Definition 1.1.1: Modus Ponens**

Ein Beweis einer Aussage $A$ ist eine sukzessive Herleitung von $A$ aus den Axiomen, in der logische Schlussregeln angewendet werden. Eine solche Regel ist der Modus Ponens.

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{\text{B}}$$

$A$ ist die Prämise, $B$ die Konklusion.

Aus dem Modus Ponens können wir schliessen, dass wenn $A$ und $A \Rightarrow B$ gilt, so gilt $B$. Der Modus Ponens ist die Basis eines Beweises. Wir werden später sehen, dass wir den Modus Ponens im Hintergrund verwenden.

**Bemerkung:-**

Wir können auch Beweise durchführen durch die Kontraposition.

In der Analysis werden wir auch mit indirekten Beweisen arbeiten. Dabei nehmen wir an, dass eine Aussage falsch ist, woraus wir eine falsche Aussage herleiten. Dies nennen wir auch den Beweis mittels Widerspruch. Es lohnt sich aber oft, einen Widerspruchsbeweis als direkten Beweis umzuschreiben, da aus eine falsche oder einer wahren Aussage eine beliebige wahre Aussage hergeleitet werden kann.

**Theorie 1.1.3** Prinzip der vollständigen Induktion

Nehmen wir an das die Funktion $P(0)$ gilt. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

## 1.2 Mengenlehre

### 1.2.1 Grundlagen

Eine Menge ist eine ungeordnete Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die in einer Menge enthaltenen Objekte nennen wir ihre Elemente. [Ziltner, 2024]

**Theorie 1.2.1** Schreibweise einer Menge

Nehmen wir an, dass $x_1, x_2, ...x_n$ Elemente sind. Dann ist die Menge, bestehend aus den Elementen $x_1, x_2, ...x_n$

$$\{x_1, x_2, ...x_n\}.$$

**Beispiel 1.2.1**

- $\{1, 0\}$
- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$

**Bemerkung:-**

Mengen können wiederholende Elemente besitzen.

**Definition 1.2.1: Beschreibende Mengenschreibweise**

Die beschreibende Mengenschreibweise ist eine Aussageform, welche Elemente $x$ definiert, die in einer Menge enthalten sein können und eine Bedingung $P(x)$ erfüllen.

$$\{x|P(x)\}\text{Für die Menge aller } x\text{, für die } P(x) \text{ gilt.} \tag{1.3}$$

**Beispiel 1.2.2**

- $\{n|n \in \mathbb{N}_0 : n \text{ ist gerade}\}$

### 1.2.2 Mengenoperationen und Teilmengenrelation

Wie in Kapitel 1.1 haben Mengen auch Logikoperationen. Sie sind sehr ähnlich zu den normalenLogikoperationen.

| | |
|---|---|
| $A \cup B$ | $\{x \| x \in A \wedge x \in B\}$ = Durchschnitt |
| $A \cap B$ | $\{x \| x \in A \vee x \in B\}$ = Vereinigung |
| $A \setminus B$ | $\{x \in A \| x \notin B\}$ = Differenz |

Wenn die Menge $A$ auch in der Menge $B$ liegt, so ist $A$ eine Teilmenge von $B$.

$$A \subseteq B.$$

**Theorie 1.2.2** Das Komplementär einer Menge

Das Komplementär einer Menge definiert eine Menge $A$, welche die Elemente einer anderen Menge $B$ nicht beinhaltet.

$$B^{\complement} = A \setminus B.$$

**Theorie 1.2.3** De-Morganschen Gesetze

- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

**Theorie 1.2.4** Tupel

Wenn wir eine Liste von Elementen, bestehen aus $x_1, ..., x_n$ haben, so nennen wir diese Liste ein Tupel. Die Anzahl von Elementen $n$ sowie die Anordnung der Elementen spielt eine Rolle.

- Für $n = 2$ nennen wir den Tupel ein Paar.
- Für $n = 3$ nennen wir den Tupel ein Trippel.
- Für alle anderen $n$ bezeichnet man die Liste als n-Tupel.

Wie schon vorher erwähnt spielt die Anordnung eine grosse Rolle. $((x_1, x_2) \neq (x_2, x_1))$

**Theorie 1.2.5** Karthesisches Produkt

Das Produkt zweier Mengen (*karthesische Produkt*) $X$ und $Y$ kann als eine Menge bestehend aus den Permutationen den Elementen der beiden Mengen dargestellt werden.

**Beispiel 1.2.3** (Karthesisches Produkt)

Sei $X := \{0, 1\}$ und $Y := \{\text{Apfel}, \text{Berg}\}$.

$$X \times Y = \{(0, \text{Apfel}), (0, \text{Berg}), (1, \text{Apfel}), (1, \text{Berg})\}.$$

**Bemerkung:-**

Für Potenzen gilt das gleiche Prinzip, i.e $X^2 = X \times X$, $X^3 = (X \times X) \times X$, usw.

**Definition 1.2.2: Euklidische Norm**

Die euklidische Norm $||\cdot||$ ist die Distanz von einem Punkt, z.B. $v$ zu ihrem Ursprung und wird wie folgt berechnet.

$$||v|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

**Theorie 1.2.6** Offener und abgeschlossener Ball, Sphäre

E in Ball oder eine Sphäre ist eine Menge von Punkten in einen $n$-Dimensionalen Raum, welche einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt des Balles bzw. der Sphäre haben.

1. Der offene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt $x_0$ kleiner als der Radius $r$ ist.

$$B_r(x_0) := B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| < r\}.$$

2. Der abgeschlossene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt $x_0$ kleiner oder gleich dem Radius ist.

$$\bar{B}_r(x_0) := \bar{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| \leqslant r\}.$$

3. Die Sphäre ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt $x_0$ gleich dem Radius ist.

$$S_r^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| = r\}.$$

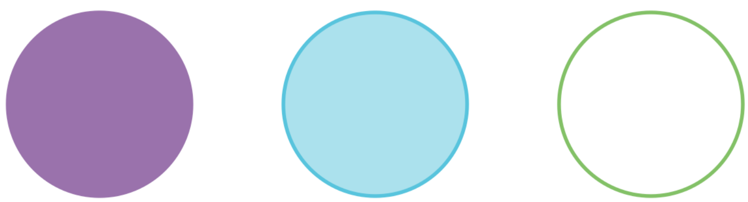

Abbildung 1.1: Von links nach rechts: Offener Ball, abgeschlossener Ball, Sphäre

**Bemerkung:-**

Dass die Sphäre eine Dimension verliert $(n-1)$ ist auf den ersten Blick verwirrend, macht aber Sinn. Bei einer Sphäre wird nur der Mantel betrachtet. Dadurch wird der Freiheitsgrad verringert was dazu führt, dass eine Dimension verloren geht i.e. der Mantel einer Kugel ist eine Fläche oder der Rand einer Kreisscheibe ist eine Linie.

**Theorie 1.2.7** Fall $r = 0$ und $r = \infty$

Falls $r = 0$ gilt für den Ball

- $B_0(x_0) = \emptyset$ da die euklidische Norm nicht kleiner als 0 sein kann
- $\bar{B}_0(x_0) = \{x_0\}$ da der einzige Punkt dessen Abstand zum Mittelpunkt null ist der Mittelpunkt selbst ist.

Falls $r = \infty$, dann gilt

- $B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$
- $\bar{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$

**Bemerkung:-**

Obwohl $\mathbb{R}^n$ ein offener und auch ein geschlossener Ball sein kann bedeutet es nicht, dass $B_\infty(x_0) = \bar{B}_\infty(x_0)$ ist. Das Problem ist, dass kein Rand existiert für einen Kreis mit $r = \infty$. Deshalb ist $\mathbb{R}^n$ beides.

## 1.3 Quantoren

Quantoren sind logische Operatoren, die angeben, wie viele Objekte $x$ eine Bedingung $P(x)$ erfüllen. Die zwei wichtigsten Quantoren sind die folgenden: [Ziltner, 2024]

| Notation | Bedeutung | Beziehung |
|---|---|---|
| $\forall$ | für jedes- für alle" | Allquantor |
| $\exists$ | ës gibt" | Existenzquantor |

[Ziltner, 2024]

**Beispiel 1.3.1** (Quantoren)

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 0$ ist Wahr

(ii) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n > 0$ ist Wahr

(iii) $\forall m \in \mathbb{N}_0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant n$ ist Wahr

(iv) $\exists n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant n$ ist Falsch

**Bemerkung:-**

Die Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle. Dies können wir an den vorherigen Beispielen erkennen.

**Theorie 1.3.1** Verneinung einer quantifizierten Aussageform

Die Verneinung von den Quantoren $\forall$ und $\exists$ ist wie folgt definiert.

$$\neg(\forall x \in X : P(x)) \equiv \exists x \in X : \neg P(x).$$
$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \equiv \forall x \in X : \neg P(x).$$

## 1.4 Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion (oder Abbildung) von $X$ nach $Y$ eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $y \in Y$ zuordnet. [Ziltner, 2024]

**Definition 1.4.1: Funktion**

Eine Funktion (oder Abbildung) ist ein Tripel

$$f = (X, Y, G),$$

wobei $X$ und $Y$ Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, sodass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, sodass $(x, y) \in G$.
[Ziltner, 2024]

**Definition 1.4.2: Definitionsbereich, Zielbereich, Graph, Wert in einem Punkt**

Für die Funktion $f$ haben wir folgende Definitionen um die Eigenschaften einer Funktion zu definieren.

- $\operatorname{dom} f := \operatorname{dom}(f) :=$ Definitionsbereich von $f := X$ Der Definitionsbereich sind die Werte von $x$, welche für diese Funktion erlaubt sind.
- $\operatorname{codom} f := \operatorname{codom}(f) :=$ Zielbereich von $f := Y$ Der Zielbereich sind die Werte von $y$, welche für diese Funktion erlaubt sind.
- Graph von $f := G$
- Wert von $f$ an der Stelle $x \in X := f(x) := y$
- $f : X \to Y :=$ "$\operatorname{dom} f = X$und $\operatorname{codom} f = Y$"

**Definition 1.4.3: Bild**

Das Bild einer Funktion $f$ ist eine Menge, welche die möglichen $\operatorname{codom}(f)$ beinhaltet ($\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{codom}(f)$).

$$f(A) := \{f(x) | x \in A\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge $A$, welches eine Teilmenge von $X$ ist, auf $f$ verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von $Y$.

**Definition 1.4.4: Urbild**

Das Urbild einer Funktion $f$ ist eine Menge, welche die möglichen $\operatorname{dom}(f)$ beinhaltet ($f^{-1} \subseteq \operatorname{dom}(f)$)

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge $B$, welches eine Teilmenge von $Y$ ist, auf die Inverse von $f$ ($f^{-1}$) verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von $X$.

Wir werden nun weitere Eigenschaften von Funktionen kennenlernen: Die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

**Definition 1.4.5: Injektiv**

Eine Funktion ist injektiv wenn

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von $X$ nicht dasselbe Resultat ausgibt, wenn das Element in die Funktion eingesetzt wird.

**Definition 1.4.6: Surjektiv**

Eine Funktion ist surjektiv wenn

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von Y durch ein Element von X zugeordent ist. Dabei kann ein Element von X auch mehrere Elemente von Y zugeordnet sein.

**Definition 1.4.7: Bijektiv**

Eine Funktion ist bijektiv wenn sie injektiv und surjektiv ist. Mathematisch bedeutet dies

$$(\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \wedge (\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y).$$

**Beispiel 1.4.1** (injektiv, surjektiv, bijektiv [Ziltner, 2024])

- Die Identität $\mathrm{id}_x$ ist bijektiv
- Die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := x$, ist injektiv und nicht surjektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), f(x) := x^2$, ist nicht injektiv, aber surjektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.

**Bemerkung:-**

Die Identität ist eine Funktion, welches sich selber wieder ausgibt.

$$f(x) = x.$$

**Definition 1.4.8: Umkehrfunktion / Inverse**

Die Umkehrfunktion oder Inverse einer Funktion ist eine Funktion, welches das Gegenteil der ursprünglichen Funktion $f$ macht.

$$f^{(-1)} : Y \longrightarrow X, f^{(-1)}(y) := x.$$

In anderen Worten: wenn man ein Element von X in die Funktion einsetzt, so bekommt man ein Element von Y. Wichtig zu erwähnen ist, dass eine Inverse nur existiert, wenn die Funktion bijektiv ist.

**Beispiel 1.4.2** (Umkehrfunktion / Inverse [Ziltner, 2024])

- Die Umkehrfunktion der Identität $\mathrm{id}_x$ ist $\mathrm{id}_x^{-1} = \mathrm{id}_x$.
- Die Funktion $f : [0, \infty), f(x) := x^2$, ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{\phantom{x}} := f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$.
- Die Exponentialfunktion exp als Funktion von $X := \mathbb{R}$ nach $Y := (0, \infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Definition 1.4.9: Verknüpfung von Funktionen**

Die Verknüpfung von Funktion ist wie folgt definiert.

$$g \circ f : X \to Z, g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Dies bedeutet nichts weiter, dass der codom$(f)$ in die Funktion $g$ eingesetzt wird, und Elemente von $Z$ dabei herauskommen.
Wichtig zu erwähnen ist, dass die codom$(f) =$ dom$(g)$ ist, weil sonst die Verknüpfung nicht funktionieren würde.

**Beispiel 1.4.3** (Verknüpfung, Reihenfolge davon [Ziltner, 2024])

- Wir betrachten $X := Y := Z$ und die Funktionen

  $$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x + 1, g(y) := y^2.$$

  Die Verknüpfung von $f$ und $g$ ist gegeben durch

  $$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \circ f(x) = (x + 1)^2.$$

  Der Zielbereich von $g$ ist gleich $\mathbb{R}$. Das stimmt mit dem Definitionsbereich von $f$ überein. Daher ist die umgekehrte Verknüpfung ebenfalls sinnvoll. Sie ist gegeben durch

  $$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \circ g(y) = y^2 + 1.$$

  In diesem Beispiel gilt daher

  $$g \circ f \neq f \circ g.$$

- Wir betrachten $X := \mathbb{R}^2, Y := Z := \mathbb{R}$ und die Funktionen

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := x + y, g := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

  Die Verknüpfung von $f$ und $g$ ist gegeben durch

  $$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g \circ f(x, y) = \exp(x + y) = e^{x+y}.$$

  Die umgekehrte Verknüpfung $f \circ g$ ist nicht wohldefiniert (= sinnvoll), da der Zielbereich von $g$, also $\mathbb{R}$, nicht gleich dem Definitionsbereich von $f$, also $\mathbb{R}^2$, ist.

# Kapitel 2

# Zahlen und Vektoren

Neben Logik bilden Zahlen die Basis für die Analysis.

## 2.1 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

**Definition 2.1.1: Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen**

Die natürlichen Zahlen sind definiert als alle positive ganze Zahlen.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Die ganzen Zahlen sind alle ganzen Zahlen.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Die rationalen Zahlen sind alle Brüche.

$$\mathbb{R} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

**Bemerkung:-**

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (Die Menge der ganzen Zahlen beinhaltet die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen beinhaltet die Menge der ganzen Zahlen)
2. $\mathbb{N}_0$ beschreibt die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0.

Trotz der unendlichen Möglichkeiten rationale Zahlen zu bilden wird es immer noch löcher in der Zahlenebene geben, welche nicht von den rationalen Zahlen gedeckt werden kann. Deshalb führen wir eine neue Art von Zahl ein.

## 2.2 Die reellen Zahlen

Wie im letzten Kapitel besprochen führen wir eine neue Zahl ein, welche die Löcher in der Zahlenebene "stopfen" kann. Diese Zahl, auch reelle Zahl genannt, wird auch als Dedekind-Schnitte bezeichnet.

**Definition 2.2.1: Menge der reellen Zahlen, Dedekind-Schnitte [Ziltner, 2024]**

Eine reelle Zahl (oder Dedekind-Schnitt oder Dedekindscher Schnitt) ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $x \neq \emptyset$

(b) $x \neq \mathbb{Q}$

(c) $\forall r \in x \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$

(d) $\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r$

Wir definieren

$$\mathbb{R} := \text{reelle Zahl} = \text{Dedekind-Schnitt}.$$

**Bemerkung:-**

Die Definition von Herr Ziltner ist eine alternative Definition. Normalerweise tut man die untere Hälfte definieren. Da die Rechenoperationen der unteren Hälfte aufwendiger zu definieren ist als die obere, definieren wir die untere Hälfte.

In anderen Worten ist eine reelle Zahl eine Menge von rationalen Zahlen, welche in eine oberen und in einer unteren Hälfte unterteilt ist. Dies beide Hälften sind eine Teilmenge der rationalen Zahlen. Punkt (a) besagt, dass die untere Hälfte rationale Zahlen beinhalten muss und nicht die leere Menge sein darf. Zusätzlich darf die untere Hälfte nicht eine reelle Zahl sein da sonst die untere Hälfte die ganze Zahlenebene wäre. Dies besagt Punkt (b). Punkt (c) sagt aus, dass eine rationale Zahl $s$ gibt, welche kleiner ist als die Zahl $r$, welche sich in der unteren Hälfte befindet. Zusätzlich gilt laut (d), dass es kein grösstes Element $s_0$ gibt, welches grösser als $r$ ist.

**Bemerkung:-**

Damit es keine Verwirrung gibt zwischen der reellen Zahl $r = \sqrt{2}$ und der reellen Zahl als ein Intervall von einem Dedekind-Schnitt wird diese als **r** gekennzeichnet. (In der Vorlesung $\boxed{\text{r}}$)

Formell beschreiben wir der Dedekind-Schnitt

$$\mathbf{r} := s \in \mathbb{Q} | s < r \in \mathbb{R}$$

was nichts anderes Bedeutet als **r** ist die Menge aller rationalen Zahlen $s$, wobei $s$ kleiner als $r$, der Grenzwert vom Intervall ist.
Da wir die reellen Zahlen als eine Menge definiert haben, kann man die üblichen Rechenoperationen nicht mehr wie bei "normalen" Zahlen verwenden.

**Definition 2.2.2: Ordnung, Addition, Multiplikation reeller Zahlen** [Ziltner, 2024]

(i) (Ordnung:) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \leqslant y :\leftrightarrow x \supseteq y d.h. y \subseteq x.$$

$$x < y :\leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y.$$

(ii) (Addition:) Wir definieren die Addition reeller Zahlen als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$x + y := +(x, y) := r + s | r \in x, s \in y.$$

(iii) (Subtraktion:) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $-x$ als das eindeutige Element von $\mathbb{R}$, sodass

$$x + (-x) = \mathbf{0}.$$

(iv) (Multiplikation:) Wir definieren die Multiplikation reeller Zahlen als die Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \cdot y = \begin{cases} \{rs | r \in x, s \in y\}, & \text{falls } x, y \geqslant \mathbf{0}. \\ -((-x) \cdot y), & \text{falls } x < \mathbf{0}, y \geqslant \mathbf{0}. \\ -(x \cdot (-y)), & \text{falls } x \geqslant 0, y < 0. \\ (-x \cdot (-y)), & \text{falls } x, y < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Gehen wir die einzelnen Punkte durch. (i) besagt, dass die untere Hälfte $x \geqslant$ die andere untere Hälfte $y$ ist, genau dann wenn $x$ eine Teilmenge von $y$ ist. Zusätzlich gilt, dass $x > y$ ist wenn $x \leqslant y$ ist und $x \neq y$ ist. In einfachen Worten gesagt bedeutet dies, dass wenn der untere Grenzwert von $x$ kleiner ist als der untere Grenzwert von $y$, so ist $y$ entweder in $x$ enthalten da sich die zwei Mengen schneiden oder $x$ und $y$ gleich.
(ii) sagt aus, dass wenn du ein beliebiges Element aus $x$ nimmst und ein beliebiges Element aus $y$ nimmst und die zusammen addierst, so erhältst du eine Zahl, welches grösser ist als $X + Y$, wobei $X$ die reelle Zahl ist, welche $x$ darstellen soll und $Y$ respektive die reelle Zahl ist, welche $y$ darstellen soll.
(iii) ist hoffentlich klar.
(iv) ist einfach eine komplizierte Art die Multiplikation zu definieren. Grundsätzlich sagt es aus, dass wenn du ein Element von $x$ nimmst und ein Element von $y$ und die miteinander multiplizierst, so erhältst du eine neue Menge welches die resultierende reelle Zahl aus Dedekind-Schmitte darstellt.

**Lenma 2.2.1** Bernoullische Ungleichung [Ziltner, 2024]
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, \infty)$ gilt

$$(1 + x)^n \leqslant 1 + nx.$$

In einfachen Worten sagt die Bernoullische Ungleichung, dass exponentielles Wachstum stärker oder gleich stark ist wie lineares Wachstum. Diese Gleichung wird vor allem für Beweise von der Konvergenz von Reihen und Folgen verwendet. Meistens wird der Beweis mit Induktion durchgeführt.

**Definition 2.2.3: b-adischer Bruch** [Ziltner, 2024]

Sei $b \leqslant 2$. Ein b-adischer Bruch ist Abbildung $a : \mathbb{Z} \to \{0, ..., b-1\}$, oder das Negative einer solchen Abbildung, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i > k$ gilt $a_i := a(i) = 0$.

(b) Es gibt keine Zahl $i \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i \leqslant l$ gilt $a_i = b - 1$.

Wir definieren

$$R_b := \{\text{b-adischer Bruch}\}.$$

Der b-adischer Bruch ist einfach gesagt eine Art, um eine reelle Zahl darzustellen. $b$ ist die Basis und zeigt mit welchen Zahlen die reelle Zahl dargestellt werden kann. (10 = Dezimalsystem) Dabei gilt, dass der $b$-adischer Bruch laut (a) nach links alle Elemente eventuell Null sein werden, jedoch laut (b) nach rechts nicht die gleiche Zahl wiederholen dürfen. Dadurch werden Zahlen eliminiert, welche einfach aufgerundet werden können.

**Definition 2.2.4: Ordnung von $b$-adischer Brüchen [Ziltner, 2024]**

Wir definieren $<_b$ als die strikte lexikographische Ordnung auf $\mathbb{R}_b$. d.h. für $a, a' \in \mathbb{R}_b$ definieren wir

$$a <_b a' :\longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}(\forall i > n : a_i = a'_i) \wedge a_n < a'_n.$$

Wir definieren

$$a \leqslant_b a' :\longrightarrow a = a' \vee a <_b a'.$$

Die obige definition sagt einfach aus, dass man die Zahlen einer reellen Zahl ausgedrückt als ein $b$-adischer Bruch von links nach rechts vergleicht. Sobald die Zahl $a$ kleiner ist als $a'$ so ist die Zahl grösser zur Basis $b$. Dabei ist einfach wichtig, dass die vorherigen Zahlen gleich sind.

**Definition 2.2.5: Betrag [Ziltner, 2024]**

Der (Absolut-) Betrag einer Zahl ist die Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hoffentlich ist der Betrag einer Zahl allen bekannt. Diese Definition ist einfach formell und sagt aus, dass wenn die Zahl $x$ positiv ist so ist deren Betrag die Zahl selbst und sonst ist es $-x$, da das negative einer negativen Zahl eine positive Zahl ergibt.
Mit dem Betrag können 2 Sätze eingeführt werden, welche für Beweise sehr nützlich sind.

**Theorie 2.2.1** Dreiecks-Ungleichung [Ziltner, 2024]
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

**Theorie 2.2.2** Youngsche Ungleichung [Ziltner, 2024]
Es seien $x, y, c \in \mathbb{R}$, sodass $c > 0$. Dann gilt

$$2|xy| \leqslant cx^2 + \frac{y^2}{c}.$$

## 2.3 Supremum und Infimum

**Definition 2.3.1: Schranke, Beschränkheit [Ziltner, 2024]**

Sei $A \subset \mathbb{R}$.

- Eine obere Schranke für $A$ ist eine Zahl $b \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $a \in A$ gilt $a \leqslant b$.
- $A$ heisst nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine obere Schranke für $A$ gibt.
- Die Begriffe untere Schranke und nach unten beschränkt sind analog definiert.
- $A$ heisst beschrankt genau dann, wenn $A$ nach oben und unten beschränkt ist.

Gehen wir die einzelnen Punkte der Definition durch. Der erste Punkt besagt, dass eine Menge von Zahlen $A$ eine Zahl hat, welche $\geqslant$ der grössten Zahl in der Menge ist. Dies bedeutet, dass die grösste Zahl der Menge diese Zahl ist oder sie annähert. Dieser wird "obere Schranke" genannt. Obwohl es mehrere Zahlen sein können ist es keine Menge.
Punkt zwei sagt aus, dass eine Menge nach oben beschränkt ist, wenn es eine obere Schranke hat.
Punkt drei definiert die obere Schranke gleich der unteren Schranke. Dies bedeutet, dass eine Menge von Zahlen $A$ eine Zahl hat, welche $\leqslant$ die kleinste Zahl der Menge ist. Dies bedeutet wiederum, dass die kleinste Zahl der Menge diese Zahl ist oder sie annähert. Auch hier gilt wieder, dass mehrere Zahlen die obere Schranke sein können, jedoch die obere Schranke keine Menge ist. Der letzte Punkt definiert eine beschränkte Menge. Eine beschränkte Menge ist einfach eine Menge, welche nach unten und nach oben beschränkt ist.

**Theorie 2.3.1** Vollständigkeit der reellen Zahlen [Ziltner, 2024]

(i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke. (Damit meinen wir ein kleinstes Element der Menge $S := \{-\text{obere Schranke von } A\}$.)

(ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset$ besitzt eine grösste untere Schranke.

Wie vorher erwähnt kann eine Menge $A$ mehrere obere oder untere Schranken haben. Das Theorem besagt, dass die Menge $A$, falls sie nicht leer ist eine kleinste obere Schranke haben muss (das grösste Element in der Menge $A$) und eine grösste untere Schranke. (das kleinste Element der Menge $A$)

**Definition 2.3.2: Supremum, Infimum [Ziltner, 2024]**

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir definieren das Supremum von $A$ als

$$\sup A := \begin{cases} \text{kleinste obere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{nach oben beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Wir definieren das Infimum von $A$ als

$$\inf A := \begin{cases} \text{grösste untere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } A \text{nach unten beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Gehen wir nun die einzelnen Definitionen von Supremum und Infimum durch.
Das Supremum ist im allgemeinen Fall die kleinste obere Schranke. Falls $A$ nicht beschränkt ist, so ist das Supremum $\infty$. Falls $A$ zusätzlich noch die leere Menge ist, so ist das Supremum von $A$ $-\infty$.
Beim Infimum ist die grösste untere Schranke der allgemeine Fall. Falls $A$ nicht beschränkt ist, so ist das Supremum $-\infty$. Falls $A$ zusätzlich noch die leere Menge ist, so ist das Infimum von $A$ $\infty$.
Grundsätzlich kann man einfach sagen, dass das Supremum und Infimum die Definitionen von Schranken erweitert.

**Definition 2.3.3: Maximum, Minimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ [Ziltner, 2024]**

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Maximum von $A$ ist ein Element $a \in A$, sodass $a \geqslant b$, für jedes $b \in A$. Ein Minimum von $A$ ist ein Element $a \in A$, sodass $a \leqslant b$, für jedes $b \in A$.

Einfach gesagt ist das Maximum bzw. das Minimum einer Menge das grösste, bzw. das kleinste Element von Menge.

## 2.4 Komplexe Zahlen

Da wir keine Lösung für $x^2 = 2$ hatten, haben wir die reellen Zahlen eingeführt. Dies werden wir in diesem Kapitel ebenfalls tun, da wir keine Lösung für $x^2 = -1$ haben.

Die Notizen von Herr Ziltner sind nicht sehr nützlich, weshalb ich dieses Kapitel überspringen werde. Ich würde die Notizen von "Mathematische Methoden (frühere Name Komplexe Analysis)" anschauen.

# Kapitel 3

# Folgen und Reihen

# Kapitel 4

# Stetigkeit, Topologie

# Kapitel 5

# Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ durch den Punkt $x_0, f(x_0)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0)$ und $(x, f(x))$ für $x$ gegen $x_0$. Ableitungen sind allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

## 5.1 Differential und Differentiationsregeln

**Bemerkung:-**

$$dx \text{ und } dy \text{ sind Differentialen. } \Rightarrow f'(x_0) = \frac{dy}{dx}, dx \text{ nennt man Differentialquotient..}$$

**Bemerkung:-**

Je kleiner $\Delta x$ ist, desto näher kommt es an den Wert von $\Delta y$ für:

$$\Delta y \equiv f'(x_0)\Delta x.$$

**Beispiel 5.1.1**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2, f'(x_0 = 0) = 0.$$

**Bemerkung:-**

Die Menge $U$ ist offen, da $f$ stetig ist. Dies folgt aus dem Fakt, da das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist $\forall V$ offen.

## 5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

**Bemerkung:-**

Für

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

gilt, dass $a$ die Steigung der Sekante ist.

**Bemerkung:-**

$\Rightarrow$ Die Funktion hat genau eine Lösung, die auch nach $f(0) = y_0$ erfüllt, mit $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, nämlich $f(x) = ye^{cx}$.

**Beispiel 5.2.1**

$$\frac{x^n}{e^{(x^n)}}?.$$

$$\frac{n \cdot x^{n-1}}{e^{(x^n)}} = \frac{e^x - 1}{x} = \exp(0) = 1.$$

Kapitel 6

# Integration

# Teil II

# Analysis II

# Kapitel 7

# Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

# Kapitel 8

# Topologie, Stetigkeit

Kapitel 9

# Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

## Kapitel 10

# Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

## Kapitel 11

# Mehrdimensionale Riemann-integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale

# Kapitel 12

# Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss

## 12.1 Satz von Green

**Bemerkung:-**

Der intrinsische Rand ist nicht dasselbe wie der topologische Rand. Wenn wir einen Halbkreis in einem Raum betrachten, so ist der topologische Rand die Gerade des Halbkreises, sowie die gebogene Gerade. Der intrinsische Rand betrachtet nur die Gerade.

**Bemerkung:-**

rot $X$ ist eine stetige Funktion. Was dies besagt ist, dass wenn das Intervall $x_j$ immer kleiner gewählt wird, so kommt man immer näher an den Mittelwert der Funktion.

**Bemerkung:-**

$C^k$ Einbettung, weil wir dadurch die Topologie beibehalten. Ohne der Einbettung würden wir die Form abändern.

**Bemerkung:-**

Der Einheitsnormalvektorfeld beschreibt, wie die Fläche eines Körper orientiert ist. Wenn wir an jedem Punkt eines Körpers eine Tangentialfläche projezieren und an jeder Tangentialfläche einen Normalvektor hinzufügen, so bilden wir den Einheitsnormalvektorfeld. Die Koorentierung sorgt einfach dafür, dass der Einheitsnormalvektor nach aussen zeigt.

# Literaturverzeichnis

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.

[Ziltner, 2024] Ziltner, F. (2024). Notizen zur Vorlesung Analysis 1 für ITET und RW, Herbstsemester 2024.