

Analysis I

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

I Analysis I 4

Kapitel 1	Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen _____	Seite 5 _____
1.1	Logik	5

Kapitel 2	Zahlen und Vektoren _____	Seite 6 _____
------------------	----------------------------------	---------------

Kapitel 3	Folgen und Reihen _____	Seite 7 _____
------------------	--------------------------------	---------------

Kapitel 4	Stetigkeit, Topologie _____	Seite 8 _____
------------------	------------------------------------	---------------

Kapitel 5	Differentialrechnung auf \mathbb{R} _____	Seite 9 _____
5.1	Differential und Differentiationsregeln	9
5.2	Mittelwertsatz und Folgerungen	9

Kapitel 6	Integration _____	Seite 11 _____
------------------	--------------------------	----------------

II Analysis II 12

Kapitel 7	Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik _____	Seite 13 _____
------------------	---	----------------

Kapitel 8	Topologie, Stetigkeit _____	Seite 14 _____
------------------	------------------------------------	----------------

Kapitel 9	Differentialrechnung im \mathbb{R}^n _____	Seite 15 _____
------------------	--	----------------

Kapitel 10 UmkehrsatZ, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum _____ Seite 16 _____

Kapitel 11 Mehrdimensionale Riemann-integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale Seite 17 _____

Kapitel 12 Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss _____ Seite 18 _____

Kapitel References _____ Seite 18 _____

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis I (HS24) von F. Ziltener und dem Skript "Analysis für Informatiker" von Michael Struwe.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [[The Manim Community Developers, 2024](#)] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Teil I
Analysis I

Kapitel 1

Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

1.1 Logik

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. [Ziltner, 2024] (Wahr oder Falsch).

In der mathematischen Logik gelten die folgenden Sätze.

- **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:** Eine Aussage ist nicht sowohl wahr als auch falsch.
- **Satz vom ausgeschlossenen Dritten:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

[Ziltner, 2024]

Bemerkung:-

Es gibt gewisse Aussagen, als logische Aussage gelten könnte aber nicht zulässig ist. Solche Aussagen sind meistens rückbezügliche Äusserungen und sind deswegen keine sinnvollen Aussagen. (Siehe Lügner-Paradox)

Aussagen können verneint und miteinander verknüpft werden.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
T	wahr	
F	falsch	
$\neg A$	nicht A	Negation

Für Verknüpfungen verwenden wir folgende Notationen.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	inklusive Disjunktion
$A \dot{\vee} B$	entweder A oder B	exklusive Disjunktion
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	genau dann A, wenn B	Äquivalenz

Die Wahrheitstabelle der vorher erwähnten Verknüpfungen sind wie folgt.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

Kapitel 2

Zahlen und Vektoren

Kapitel 3

Folgen und Reihen

Kapitel 4

Stetigkeit, Topologie

Kapitel 5

Differentialrechnung auf \mathbb{R}

Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $x_0, f(x_0)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ für x gegen x_0 . Ableitungen sind allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

5.1 Differential und Differentiationsregeln

Bemerkung:-

dx und dy sind Differentialen. $\Rightarrow f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, dx nennt man Differentialquotient..

Bemerkung:-

Je kleiner Δx ist, desto näher kommt es an den Wert von Δy für:

$$\Delta y \equiv f'(x_0)\Delta x.$$

Beispiel 5.1.1

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2, f'(x_0 = 0) = 0.$$

Bemerkung:-

Die Menge U ist offen, da f stetig ist. Dies folgt aus dem Fakt, da das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist $\forall V$ offen.

5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

Bemerkung:-

Für

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

gilt, dass a die Steigung der Sekante ist.

Bemerkung:-

\Rightarrow Die Funktion hat genau eine Lösung, die auch nach $f(0) = y_0$ erfüllt, mit $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, nämlich $f(x) = ye^{cx}$.

Beispiel 5.2.1

$$\frac{x^n}{e^{(x^n)}}?$$
$$\frac{n \cdot x^{n-1}}{e^{(x^n)}} = \frac{e^x - 1}{x} = \exp(0) = 1.$$

Kapitel 6

Integration

Teil II
Analysis II

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

Kapitel 8

Topologie, Stetigkeit

Kapitel 9

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Kapitel 10

**Umkehrsatz, Satz über implizite
Funktionen, Untermannigfaltigkeit des
Koordinatenraums, Tangentialraum**

Kapitel 11

**Mehrdimensionale
Riemann-integration, Satz von Fubini
über wiederholte Integration,
Jordan-Mass, Substitutionsregel für
mehrdimensionale Integrale**

Kapitel 12

Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss

Literaturverzeichnis

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.

[Ziltner, 2024] Ziltner, Prof. Dr., F. (2024). Notizen zur Vorlesung Analysis 1 für ITET und RW, Herbstsemester 2024.