Analysis 1 & 2

von Jirayu Ruh, jirruh@ethz.ch

Grundlagen

Logik

A	B	Negation $\neg A$	AND $A \land B$	OR $A \lor B$	Implikation $A \to B$	Äquivalenz $A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

i) Wahre Implikation: $A \Rightarrow B$ ("A ist hinreichend für B").
ii) Wahre Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ ("A gilt genau dann, wenn B gilt").

Negation der Implikation: $\boxed{\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \land \neg B}$

Kontraposition

Falls $A \Rightarrow B$, so gilt auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ ("B ist notwendig für A").

Indirekter Beweis

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen oder die Annahme $A \land \neg B$ zum Widerspruch zu führen.

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage mit $n \in \mathbb{N}$.

i) Induktions-Verankerung: Zeige, dass $A(1)$ gilt.
ii) Induktions-Annahme: Annahme, dass $A(n)$ gilt.
iii) Induktionsschritt: Beweise, dass $A(n+1)$ gilt unter der Annahme, dass A_n gilt. Achtung, nichts unbewiesenes gleichsetzen!

Mengenlehre

Eine Menge wird oft bestimmt durch eine Bedingung $A(b)$ wobei $b \in X$:

$$\boxed{Y = \{b \in X; A(b)\}}$$

Notation	Definition
$\{\dots\}$	Set: Sammlung von ungeordneten Elemente
$(\dots)$	Tupel: Sammlung von geordneten Elementen
$A \cup B$	Vereinigungsmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \lor (x \in B)\}$
$A \cap B$	Schnittmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \land (x \in B)\}$
$A \setminus B$	Differenzmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \land (x \notin B)\}$
A^C	Komplement, alle Elemente die nicht in A sind
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge (oder gleich) von B
$\emptyset$	Leeres Set

Quantoren

Quantor	Beschreibung
$\forall x, A(x)$	Für alle x gilt $A(x)$
$\exists x, A(x)$	Es existiert min. ein x, wo $A(x)$ gilt.
$\exists! x, A(x)$	Es existiert genau ein x, wo $A(x)$ gilt.
$\nexists x, A(x)$	Es existiert kein x, wo $A(x)$ gilt.

Negation: $\boxed{\neg(\forall x, A(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg A(x) \quad \neg(\exists x, A(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg A(x)}$

Funktionen (Abbildungen)

Eine Abbildung f mit Definitionsbereich X und Bild-/Wertebereich Y:

$$\boxed{f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)}$$

Definition	Beschreibung
Urbild von $B \subset Y$	$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$
Identität	$id_X : X \to X, \quad x \mapsto x = id_X(x)$

Komposition

Sei $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Dann ist die Komposition von f und g:

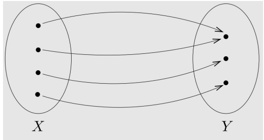
$$\boxed{F := g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))}$$

Die Komposition ist Assoziativ: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Surjektiv

f heisst surjektiv falls jedes $y \in Y$ *mindestens* ein Urbild hat, d.h.:

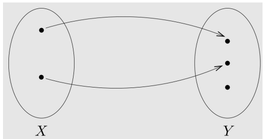
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$



Injektiv

f heisst injektiv falls jedes $y \in Y$ *höchstens* ein Urbild hat, d.h.:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Bijektiv und Umkehrabbildung

f heisst bijektiv, falls jedes $y \in Y$ *genau* ein Urbild hat, d.h. f ist surjektiv und injektiv.
Ist f bijektiv, dann kann man eine *Umkehrabbildung* f^{-1} einführen:

$$\boxed{f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f(y)}$$

Reelle Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{N}\}$
Irrationale Zahlen	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} + \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
$]a, b[\Leftrightarrow (a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{R}$ ist *Ordnungsvollständig*, dass heisst: $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R} :\ a \leq c \leq b}$

Dreiecksungleichung

Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$

Archimedisches Prinzip

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Daraus folgt: ∞ und $-\infty$ ist keine reelle Zahl.

Supremum und Infimum

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leq b$$

wobei b eine obere Schranke genannt wird, die kleinste obere Schranke ist das **Supremum**.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} A \Leftrightarrow \sup\{A; x \in \mathbb{R}\}$$

Wird das Supremum angenommen in A, dann ist es das **Maximum**.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach unten beschränkt, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \geq b$$

wobei b eine untere Schranke genannt wird, die kleinste untere Schranke ist das **Infimum**.

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} A \Leftrightarrow \inf\{A; x \in \mathbb{R}\}$$

Wird das Infimum angenommen in A, dann ist es das **Minimum**.

Potenzen und Wurzel

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Die reelle Wurzel ist definiert auf $\mathbb{R}^+$.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad b^0 = 1$$

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n} \qquad b^{-1} = \frac{1}{b^n} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \qquad \sqrt[n]{1} = 1$$

Achtung: Beim Wurzel ziehen, immer $\pm$ vor der Wurzel!

Logarithmus

Der Logarithmus ist definiert auf $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Eigenschaften:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

$$e^{\log(a)} = a \qquad \log(e) = 1 \qquad \log(1) = 0$$

Bemerkung: $x = e^n \Leftrightarrow \log(x) = n$

Die Exponentialfunktion ($\exp(x) = e^x$)

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \exp^{-1}(y) = \log(y)$$

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Trigonometrische- und Hyperbelfunktionen

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Vektoren

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$
Addition	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\ x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$
Skalarmultiplikation	$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),\ x_i \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
Skalarprodukt	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
Euklidische Norm	$\lvert\lvert x \rvert\rvert := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Cauchy-Schwarz

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}$$

Komplexe Zahlen

$$\boxed{\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}} \text{ wobei } \boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{z + \overline{z}}{2}$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
Komplexe Konjugation	$\overline{z} = a - ib$
	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$
Absolutbetrag	$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$
	$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
Phase	$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$

Eulersche Formel und Eulers Identität

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi} \qquad \boxed{e^{i\pi} = -1} \qquad \boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

Polarform

In der Polardarstellung $z = |z|e^{i\varphi}$ gelten folgende Rechenregel:

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = \cos(\varphi)$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = \sin(\varphi)$
Komplex Konjugation	$\overline{z} = |z|e^{-i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	$(|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n \cdot e^{i(n \cdot \varphi)}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})},\ k = 0, \dots, n-1$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Damit ist $\mathbb{C}$ im Unterschied zu $\mathbb{R}$ **algebraisch vollständig**.

Mitternachtsformel

Die Nullstellen von $az^2 + bz + c = 0$ sind für $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

Binomischer Lehrsatz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \quad \text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sonstiges

Bei Ungleichungen muss man bei einer **Multiplikation mit negativen Zahlen das Relationszeichen umdrehen**!

Zum herausfinden einer Rekursivformel ist eine Primfaktorzerlegung sehr hilfreich!

Die Bernouillische Ungleichung

$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Wallisches Produkt

Die irrationale Zahl π wird approximiert durch:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2}$$

Gerade und Ungerade Funktionen

Eine Funktion $f(t)$ heisst:

i) *gerade* falls $f(t) = f(-t)$ (Symmetrisch zur y-Achse).

ii) *ungerade* falls $f(t) = -f(-t)$ (Punktsymm. zum Ursprung).

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Das Produkt zweier geraden oder ungeraden Funktionen ist gerade.
- Das Produkt einer geraden und ungeraden Funktion ist ungerade.
- Falls $f(t)$ gerade ist, gilt $\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$.
- Falls $f(t)$ ungerade ist, gilt $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Trigonometrische Funktionen: Wertetabelle

deg/rad	$0°/0$	$30°/\frac{\pi}{6}$	$45°/\frac{\pi}{4}$	$60°/\frac{\pi}{3}$	$90°/\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

deg/rad	$120°/\frac{2\pi}{3}$	$135°/\frac{3\pi}{4}$	$150°/\frac{5\pi}{6}$	$180°/\pi$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Trigonometrische und Hyperbolische Identitäten

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1} \qquad \boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \qquad \boxed{\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}$$

Trigonometrische Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos(x)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\cos(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$
$$\sin(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$
$$\sin^3(x) = \tfrac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)) \qquad \cos^3(x) = \tfrac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$$

Hyperbolische Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) \qquad \sinh(x) = -i\sin(ix)$$

$$\sinh^2(x) = \tfrac{\cosh(2x) - 1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \tfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

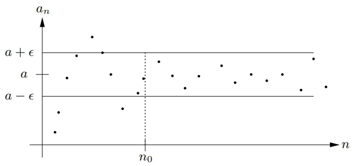
Folgen und Reihen

Grenzwert einer Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert a für $n \to \infty$, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

Wenn dies gilt, schreibt man: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a (n \to \infty)$



i) Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt.

ii) Besitzt die Folge keinen Grenzwert heisst sie *divergent*.

Monotonie bei Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $n \mapsto a_n$ heisst ..., wenn

monoton wachsend:	$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$
monoton fallend:	$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$
streng monoton wachsend:	$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$
streng monoton fallend:	$a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n$

Konvergenzkriterien

Monotone Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ eine nach oben beschränkte monton wachsende Folge bzw. eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}}(A) & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf_{n\in\mathbb{N}}(A) & \text{falls monoton fallend} \end{cases}$$

Satz: Rechenregeln unter Konvergenzbedingung

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit den Grenzwerten a bzw. b. Dann

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

iii) Falls $\forall n : b \neq 0 \neq b_n$, dann gilt: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

iv) Falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a \leq b$

Dominanz

Sei $a, b > 1$ und $r \in N \setminus 1$. Für die **Stärke der Divergenz** $(\to \infty)$ geltet folgende Kette der asymptotischen Dominanz:

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\log_b(n) \prec \sqrt{n} \prec n \prec n^r \prec a^n \prec n! \prec n^n}$$

Satz

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Teilfolgen und Häufungspunkte

Teilfolge

Sei $l : N \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsende Abzählung, dann ist $(a_{l(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Häufungspunkt

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heisst *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a eine konvergente Teilfolge besitzt:

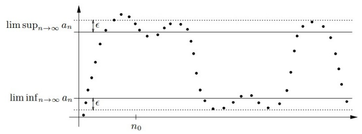
$$a = \lim_{l\to\infty} a_{l(n)}$$

a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, genau dann wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists l \geq n : |a - a_{l(n)}| < \epsilon$$

Limes superior und inferior

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann ist Limes superior und Limes inferior:



$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

wobei Limes superior und Limes inferior beides Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Ausserdem gilt:

i) Eine beschränkte Folge konvergiert $\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

ii) Eine beschränkte Folge, welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

Bolzano Weierstrass

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

Cauchy Folge und Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall m, n \geq n_0(\epsilon) : |a_m - a_n| < \epsilon$$

D.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $n_0(\epsilon)$ gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ϵ voneinander entfernt sind.

Satz: Cauchy-Kriterium

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy}$$

Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Sei $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{a}_n = (a_n^1, \ldots, a_n^d) \in \mathbb{R}^d$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \text{ falls } \lim_{n\to\infty} ||\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|| = 0$$

Es sind äquivalent: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, d\} : \lim_{n\to\infty} a_n^i = a^i$

Beschränkt in $\mathbb{R}^d$

Eine vektorwertige Folge $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ ist *beschränkt*, falls gilt

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : ||\mathbf{a}_n|| \leq C$$

Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen* ist

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Man sagt die Reihe ist *konvergent*, falls $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert.

Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent *genau dann, wenn* gilt:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \to 0 \qquad (n \geq l, l \to \infty)$$

Konvergenzkriterien für Reihen

Die Bedingung Nullfolge ($a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$) ist **notwendig**, aber *nicht* hinreichend für die Konvergenz einer Reihe.

Quotientenkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $a_k \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \begin{cases} < 1 & S_n \text{ konvergiert absolut,} \\ > 1 & S_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Wurzelkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} < 1 & S_n \text{ konvergiert absolut,} \\ > 1 & S_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Minorantenkriterium

Sei $b_n \leq a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch divergent.

Majorantenkriterium

Sei $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent.

Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz

Seien die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolut mit

$$\boxed{\sum_{n,k=1}^{\infty} a_n b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge.

Satz: Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle *Nullfolge*. Dass heisst

$$\boxed{a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

Standard Reihenabschätzung

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq n \cdot \max_{1\leq k\leq n} |a_k|}$$

Geometrische Reihe

Die Geometrische Reihe ist für $|z| < 1$ konvergent und es gilt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$$

Wichtige Reihen

Harmonische Reihe:	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	divergent
Riemann'sche ζ-Funkt.:	$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$	$\begin{cases} 0 < s \leq 1 & \text{divergent} \\ 1 < s & \text{konvergent} \end{cases}$

Wichtige Potenzreihen

Folgende Funktionen besitzen für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergente Potenzreihen:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sinh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Potenzreihen

Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der folgenden Form nennt man eine Potenzreihe:

$$\boxed{p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}$$

Konvergenzradius

Eine Potenzreihe ist konvergent für alle $|z| < \rho$ und es gilt:

$$\boxed{\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}} \begin{cases} |z| < \rho & \text{konvergiert absolut} \\ |z| = \rho & \text{keine Aussage} \\ |z| > \rho & \text{divergiert} \end{cases}$$

Innerhalb von ρ darf man Limes, Ableitung, Integral austauschen!

Potenzreihen konvergieren gleichmässig

Sei eine Potenzreihe $p(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert

$$\boxed{p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}$$

gleichmässig gegen $p(z)$ auf $B_r(0)$ für jedes $r < p$.

Potenzreihen sind stetig

Potenzreihen sind *stetig* im Inneren ihres Konvergenzradius ρ.

Potenzreihen sind differenzierbar

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist im Inneren ihres Konvergenzradius *gliedweise* differenzierbar. Die Ableitung von $f(x)$ ist

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}}$$

Ausserdem bestizt die Ableitung $f'(x)$ den *gleichen* Konvergenzradius.

Achtung: Oft ist es sinnvoll die Ableitungen der einzelnen Potenzen kurz anzuschauen, damit man die Formel nicht falsch anwendet!

Potenzreihen sind integrierbar

Eine Potenzreihen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist innerhalb ihres Konvergenzradius *gliedweise* integrierbar. Das Integral von $f(x)$ ist

$$\boxed{\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}}$$

und die Stammfunktion $F(x)$ besitzt den *gleichen* Konvergenzradius ρ.

Achtung: Oft ist es sinnvoll das Integral mit den einzelnen Potenzen kurz anzuschauen, damit man die Formel nicht falsch anwendet!

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$	$= e$	$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n$	$= e^a$
$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$	$= \log(a)$	$\lim_{n\to 0} \frac{a^n - 1}{n}$	$= \log(a)$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	$= 1$		
$\lim_{t\to\infty} t\sin(\frac{1}{t})$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}$	$= 1$
$\lim_{t\to\infty} t\log(1+\frac{1}{t})$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t}$	$= 1$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2(1-\cos(\frac{1}{t}))}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{1-\cos(t)}$	$= 2$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\sin(\frac{1}{t})}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)}$	$= 1$
$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+2t)}{\log(1+t)}$	$= 2$

Tipps Grenzwertberechnung

Verschiedene mögliche Ansätze:

- Bei Grenzwerten, welche eingesetzt $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ geben, L'hopital anwenden!
- Wurzelterme: 3te Binomische Formel versuchen
- Schwieriger $\lim_{n\to 0}(\ldots)$: Taylorformel mit Entwicklungspunkt 0 benutzen (getrennt für Nenner und Zähler anwenden!!!). Dies funktioniert, da die Approximation im Entwicklungspunkt exakt ist.
- Grenzwerten mit vielen Funktionen: So umformen zu versuchen, dass man die Grenzwerte unter 'Wichtige Grenzwerte' verwenden kann!
  - Bei $\lim_{n\to\infty}(\ldots)^n$ muss man fast immer ausschliesslich $e^{n\cdot log(\ldots)}$ als erste Umformung benutzen!

Grenzwert und Kompositionen stetiger Funktionen

Wird der Grenzwert einer Komposition stetiger Funktionen genommen, so darf man den Grenzwert auf die innere Funktion anwenden. Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \exp(\tfrac{1}{x}\log(\cos(x))) = \exp(\lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}\log(\cos(x)))$$

Stetigkeit auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^d$

Grenzwert einer Funktion

Der Abschluss

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Der Abschluss von Ω ist die Menge:

$$\boxed{\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d ; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega,\ \lim_{k\to\infty} x_k = x\}}$$

In Worten formuliert: Der Abschluss sind alle Punkte x_0, die durch Punkte in Ω erreichbar sind.

Bem: Offenbar gilt $\Omega \subset \overline{\Omega}$.

Definition: Grenzwert einer Funktion

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \overline{\Omega}$. f hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}^n$, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0 \text{ gilt } f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} a.$$

Ist dies der Fall und $x_0 \in \Omega$, dann muss gelten $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Stetig in x_0 und stetig ergänzbar

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Man sagt:

i) Sei $x_0 \in \Omega$. f ist *stetig* in x_0, falls f in x_0 einen Grenzwert besitzt.

ii) Sei $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. f heisst an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar*, falls f in x_0 einen Grenzwert besitzt. Notation: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} = a$

Für $\mathbb{R}$: Links- und Rechtsseitiger Grenzwert

Nähert man sich von Links an x_0 an, d.h. $x < x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Nähert man sich von Rechts an x_0 an, d.h. $x > x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Satz

Sei $]a, b[\to \mathbb{R}$ monoton wachsend oder monoton fallend. Dann existieren für jedes $x_0 \in]a, b[$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Für $\mathbb{R}$: Monotonie bei Funktionen

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst streng monoton wachsend, falls gilt

$$\boxed{a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) < f(y)}$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst streng monoton fallend, falls gilt

$$\boxed{a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) > f(y)}$$

Für $\mathbb{R}^d$: Grenzwert in $\mathbb{R}^d$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$. Die Folge x_k konvergiert gegen x, falls

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} ||x_k - x|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^j = x^j}$$

wobei $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^d)$ und $x = (x^1, \ldots, x^d)$ beide in $\mathbb{R}^d$ definiert sind.

Stetige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann sagt man:

f heisst **stetig auf** $\Omega \subset \mathbb{R}$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Satz: Vektorraum $C^0(\Omega, \mathbb{R})$

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $\alpha f + \beta g$ auch stetig. Die stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ bilden also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Notation: $\boxed{C^0(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n ; f \text{ ist stetig}\}}$

Satz

Sind $f, g \in C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$. So ist auch $f \circ g \in C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$.

Lipschitz stetig

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. f heisst *L-Lipschitz stetig* mit der Lipschitzkonstante $0 \leq L$, falls

$$\boxed{\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \text{ gilt } ||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|| \leq L \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||}$$

Bemerkung: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ Gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

Satz

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *L-Lipschitz stetig* $\Rightarrow$ f ist stetig ergänzbar in $x_0 \in \overline{\Omega}$.

Kompakt

$K \subset \mathbb{R}^d$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt. Ausserdem gilt folgende Äquivalenz:

$$\boxed{\text{K kompakt} \Leftrightarrow K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}}$$

Bem: Das eine Menge nicht Kompakt ist, zeigt man am besten, indem man eine unbeschränkte Folge findet (Folge ohne HP).

Lemma

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist K beschränkt und es $\exists a, b \in K$ mit

$$\boxed{-\infty < a = \inf(K) = \min(K) \qquad \max(K) = \sup(K) = b < \infty}$$

Satz: Extremumsatz

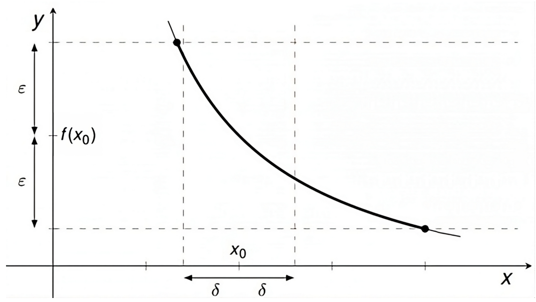
Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist auch das Bild der Funktion $f : K \to \mathbb{R}^n$ kompakt. Insbesondere gilt:

$$\boxed{f : K \to \mathbb{R}^n \text{ nimmt ihr } \textit{Maximum und Minimum} \text{ auf } K \text{ an}}$$

Für $\mathbb{R}$: Weierstrass'sches Kriterium für Stetigkeit

$f : \Omega \in \mathbb{R}$ ist an der Stelle x_0 stetig *genau dann, wenn*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x \in \Omega :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon}$$



Für $\mathbb{R}$: Der Zwischenwertsatz

Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\boxed{\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y}$$

In Worten: "Das Bild einer stetigen Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, ist ein Intervall."

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend/fallend. Setze $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

$f : [a, b] \to [c, d]$ ist bijektiv, und f^{-1} ist stetig sowie streng monoton wachsend/fallend

Satz

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend/fallend mit

$$-\infty \leq c := \lim_{x\to a^+} f(x) < \lim_{x\to b^-} f(x) =: d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv, und f^{-1} ist stetig sowie streng monoton wachsend/fallend.

Gleichmässige Stetigkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig stetig, falls gilt:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x, y \in \Omega :\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon}$$

Bemerkung: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ Gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

Satz

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt auf Ω.

Sätze

i) Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f \in C^0(K, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig.

ii) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar.

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig.

Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Supremumsnorm

Sei $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist die Supremumsnorm

$$\boxed{||f||_{C^0} := \sup_{x \in \Omega} ||f(x)|| < \infty}$$

Punktweise Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, und $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, falls

$$\boxed{\forall x \in \Omega : \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)}$$

Gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, und $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in \Omega} ||f_k(x) - f(x)|| = 0}$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz

Satz

Sei $f_k \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und f_k konvergiert gleichmässig $\Rightarrow$ f ist auf Ω stetig.

Einschub: De Morgansche Regeln

$$\boxed{(A_1 \cup A_2)^C = A_1^c \cap A_2^c} \qquad \boxed{(A_1 \cap A_2)^C = A_1^c \cup A_2^c}$$

Topologie

Offene Mengen

Der offene Ball

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $r > 0$. Der offene Ball mit Radius r und Zentrum x_0 ist

$$\boxed{B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d; ||x - x_0|| < r\}}$$

Definition: Offene Menge und Innerer Punkt

Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heisst *innerer Punkt* von der Menge Ω, falls

$$\boxed{\exists r > 0 : B_r(x_0) \subset \Omega}$$

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heisst **offen**, falls jedes $x_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt ist.

Satz: Eigenschaften offener Mengen

Es gelten folgenden Eigenschaften für offene Mengen:

i) $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen $\Rightarrow$ Schnittmenge $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ist offen.

ii) $\Omega_l \subset \mathbb{R}^d$ offen, $l \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_l$ offen.

iii) Endliche offene Mengen $(A_i)_{i \in I} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ offen.

Abgeschlossene Mengen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst **abgeschlossen**, falls das Komplement $A^C = \mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

Satz: Eigenschaften abgeschlossener Mengen

i) A_1, A_2 abgeschlossen $\Rightarrow$ Vereinigungsmenge $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

ii) $A_l \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, $l \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_l$ abgeschlossen.

iii) Endliche abgeschlossene Mengen $(A_i)_{i \in I} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Bemerkungen

i) Die zwei Mengen $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ sind sowohl offen, als auch abgeschlossen.

ii) Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind!

Das Innere, der Abschluss und der Rand einer Menge

Das Innere

Die Menge der inneren Punkte von Ω

$$\boxed{int(\Omega) = \mathring{\Omega} := \{x \in \Omega; \exists r > 0 \text{ s.d. } B_R(x) \subset \Omega\} = \bigcup_{U \subset \Omega,\ U \text{ offen}} U}$$

heisst **offener Kern** oder das **Innere** von Ω.

Der Abschluss

Der **Abschluss** einer Menge ist

$$\boxed{clos(\Omega) = \overline{\Omega} := \bigcap_{A \subset \Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overline{\Omega} = \{x_0 \in \mathbb{R}^d;\ \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega,\ \lim_{k \to \infty} x_k = x_0\}}$$

Der Rand

Der **Rand** einer Menge ist

$$\boxed{\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0 : B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \neq B_r(x) \setminus \Omega\}}$$

Satz: Eigenschaften

i) Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen.

ii) Aus $\mathring{\Omega} \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}$ folgt $\overline{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$ und die Zerlegung ist disjunkt.

iii) Es folgt das Kriterium: $\boxed{\Omega \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \Omega = \overline{\Omega} \Leftrightarrow \partial\Omega \subset \Omega}$

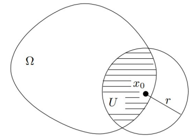
iv) Es gilt ausserdem $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega}$, sowie $\mathring{\mathring{\Omega}} = \mathring{\Omega}$

Topologisches Kriterium für Stetigkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$. Man sagt:

i) $U \subset \Omega$ heisst **Umgebung** von x_0 relativ zu Ω, falls

$$\boxed{\exists r > 0 \text{ mit } (B_r(x_0) \cap \Omega) \subset U}$$



ii) Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ offen. $U \subset \Omega$ heisst **relativ offen**, falls $U = E \cap \Omega$.

iii) $A \subset \Omega$ heisst **relativ abgeschlossen**, falls $\Omega \setminus A$ relativ offen ist.

Satz: Weierstrass'sches Kriterium für Stetigkeit

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Es sind äquivalent:

---

f ist an der Stelle x_0 stetig gemäss Folgekriterium.

$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d $\forall x \in \Omega : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

$\Leftrightarrow$ Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in Ω.

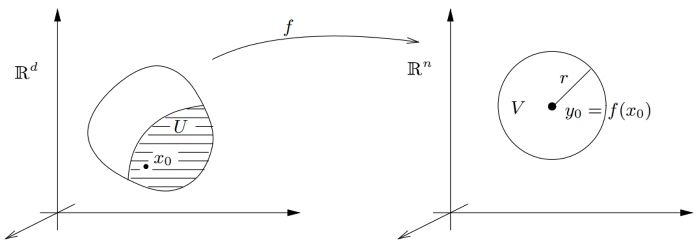
Topologisches Kriterium für Stetigkeit

Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

f ist stetig ($f \in C^0$).

$\Leftrightarrow$ Das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ offen.

$\Leftrightarrow$ Das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ abgeschlossen.



Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Differential

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in \Omega$. f heisst *differenzierbar* an der Stelle x_0 falls folgender Grenzwert exisitert:

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$f'(x)$ heisst *Ableitung* (oder Differential) von f an der Stelle x_0.

Bemerkung: Analoges gilt für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (Vektorwertige Funktion), einfach Komponentenweise.

Geometrische Bedeutung

i) Der Differentialquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x)), (x_0, f(x_0))$.

ii) Die Ableitung $f'(x_0)$ entspricht der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Satz

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

Eigenschaften des Differentials

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

Summenregel	$(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$
Produktregel	$(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
Quotientregel	$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$
Kettenregel	$(g(x_0) \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Bei der Quotientregel muss natürlich $g(x_0) \neq 0$ sein.

Der Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. Dann existiert $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Korollar

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gilt:

i)	Falls $f'(x) \equiv 0$ auf $]a, b[$, dann ist f konstant
ii)	Falls $f'(x) \geq 0$ auf $]a, b[$, dann ist f monoton wachsend.
iii)	Falls $f'(x) > 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monton wachsend.

Bernouilli de l'Hôpital

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. Sei $g'(x_0) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ und $f(a) = 0 = g(a)$ oder $f(a) = \pm\infty = g(a)$. Existiert

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > a$, und es gilt

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Existiert $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht, so muss man nochmals l'Hôpital anwenden.

Der Umkehrsatz

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ auf $]a, b[$. Seien

$$-\infty \leq c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} :]c, d[\to]a, b[$ ist differenzierbar für $y \in]c, d[$ und das Differential ist

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Funktionen der Klasse C^1

Sei Ω ein offenes Intervall und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f heisst von der Klasse $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, falls die Ableitung $f'(x)$ stetig ist. Es gilt also

$$\boxed{C^1(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f, f' \text{ stetig}\}}$$

Satz

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$f_k \xrightarrow{glm} f, f'_k \xrightarrow{glm} g \quad (k \to \infty)$$

wobei $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $f' = g$.

Höhere Ableitungen

Sei $m \in \mathbb{N}$. f heisst auf Ω m-Mal differenzierbar, falls die m-te Ableitung von f existiert und wird folgendermassen notiert:

$$f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m}$$

Funktionen der Klasse C^m

Sei Ω ein offenes Intervall und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ m-Mal differenzierbar. f heisst von der Klasse $C^m(\Omega, \mathbb{R})$, falls $f^m(x)$ stetig ist. Es gilt also

$$\boxed{C^m(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ ist } m\text{-mal diffbar}, f, \ldots, f^{(m)} \text{ stetig}\}}$$

Bemerkung: Falls $f \in C^m(\Omega, \mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann schreibt man $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Solche Funktionen nennt man "Glatte Funktionen".

Taylor Entwicklung

Sei $f \in C^{(m+1)}([a, b], \mathbb{R})$ auf $]a, b[$ m-Mal differenzierbar. Die Taylorentwicklung m-ter Ordnung von f am Entwicklungspunkt a ist

$$\boxed{T_m f(x; a) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \underbrace{f^{(m+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}}_{\text{Restterm}}}$$

Wobei $\xi \in]a, b[$ ist, d.h. eine beliebige Zahl im Definitionsbereich.

Beste Approximation

Je näher x bei a liegt, desto besser approximiert das Taylorpolynom $T_m f(x; a)$ an der Stelle x die Funktion f. Für $a < x < b$ gilt

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_m f(x, a)}{(x-a)^m} = 0}$$

Abschätzung vom Restterm

Der Restterm $r_m f(x; a)$ besitzt folgende Abschätzung:

$$\boxed{|r_m f(x, a)| \leq \sup_{a<\xi<x} |f^{(m+1)}(\xi)| \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}}$$

Lokale Extrema

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ein $x_0 \in \Omega$ heisst (*strikte*) lokale Minimalstelle von f, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in U \quad (\text{bzw. } f(x) > f(x_0), \forall x \in U \setminus \{x_0\})$$

Analoges gilt für lokale Maximastellen.

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \Omega$. Es gilt folgendes:

i)	Wenn $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein lokales Extrema.
ii)	Sind $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Minimum.
iii)	Sind $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Maximum.

Achtung: Randpunkte vom Definitionsbereich nicht vergessen!

Allgemeinerer Satz

Sei $f \in \mathbb{C}^n(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

i)	Ist n gerade sowie $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Minimum.
ii)	Ist n gerade sowie $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Maximum.
iii)	Ist n ungerade, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Konvexe Funktionen

Sei $f \in C^2(]a, b[, \mathbb{R})$ mit $f'' \geq 0$. Ein Funktion f heisst *konvex*, falls für alle $x_0, x_1 \in]a, b[$ und für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\boxed{f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_0) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_0)}$$

Die Funktionen für welche dies gilt heissen Konvex.

Bemerkung: Wenn $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist konvex.

Integralrechnung auf $\mathbb{R}$

Stammfunktionen (SF)

$F \in C^1(]a,b[)$ heisst Stammfunktion zu f, falls für alle $x \in]a,b[$ gilt:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \qquad F'(x) = f(x)}$$

Satz: Integrationskonstante

Zwei Stammfunktionen $F_1, F_2 \in C^1(]a,b[)$ einer Funktion unterscheiden sich nur durch eine Integrationskonstante voneinander: $F_1 - F_2 \equiv c \in \mathbb{R}$

Das Integral

Sei $F \in C^1(]a,b[,\mathbb{R})$ eine SF von f. Das Integral von f über $[a,b]$ ist:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt := F(b) - F(a)}$$

Eigenschaften vom Integral (und R-Integral)

Linearität

Seien $f,g \in C^0(]a,b[)$ mit SFs $F,G \in C^1(]a,b[)$, und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx}$$

Monotonie

Seien $f,g \in C^0(]a,b[)$ mit SFs $F,G \in C^1(]a,b[)$, und $f \leq g$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_1} g(t)dt}$$

Gebietsadditivität

Sei $f \in C^0(]a,b[)$ mit SF $F \in C^1(]a,b[)$. Für $a < x_0 \leq x_1 \leq x_2 < b$ gilt:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx}$$

Standardabschätzung

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gilt folgende Abschätzung

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq ||f(x)||_{C^0}(b-a)}$$

Korollar bezüglich glm. Konveregenz

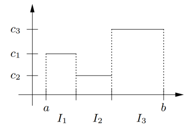
Seien $f, f_k \in C^0([a,b])$ mit $f_k \xrightarrow{glm} f\ (k \to \infty)$. Dann gilt

$$\boxed{\left|\int_a^b f_k dx - \int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f_k - f|dx \leq (b-a)\,||f_k - f||_{C^0} \to 0 (k \to \infty)}$$

Treppenfunktionen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls für eine Zerlegung $I = [a,b]$ in disjunkte (abgeschlossene, offene, halboffene) Teilintervalle $I_1, \ldots, I_K$ mit dazugehörigen *Konstanten* $c_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{I_k} \text{ mit } \chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in I_k \\ 0 & ,x \notin I_k \end{cases}}$$



Sei $|I_k|$ die Länge von I_k. Das Integral einer Treppenfunktion $f(x)$ ist

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{I_k}\right) dx = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot |I_k|}$$

Lemma

Sind $e,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $e \leq g$, dann gilt

$$\int_a^b e(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Die Riemannsche Summe

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gilt für eine beliebige Folge von disjunkte Zerlegung von I in Teilintervalle $I_k^n, 1 \leq k \leq K_n$ mit *Feinheit*

$$\delta_n = \sup_{1 \leq k \leq K_n} |I_k^n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und eine beliebigen Auswahl an Punkten $x_k^n \in I_k^n$, $1 \leq k \leq K_n$, stets

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{K_n} f(x_k^n)\chi_{I_k^n}\right) dx = \sum_{k=1}^{K_n} f(x_k^n)|I_k^n| \to \int_a^b f(x)dx\ (n \to \infty)}$$

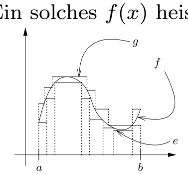
Das Riemannsche Integral (R-Integral)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und seien $e(x), g(x)$ Treppenfunktionen.

Untere Riemann-Integral von f: $$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{e(x) \leq f(x)} \int_a^b e(x)dx}$$

Obere Riemann-Integral von f: $$\boxed{\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{g(x) \geq f(x)} \int_a^b g(x)dx}$$

Ein solches $f(x)$ heisst über $[a,b]$ Riemann-integrabel, falls



$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx}$$

Sätze

i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, beschränkt $\Rightarrow f$ ist über $[a,b]$ R-integrabel.

ii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ($f \in C^0([a,b],\mathbb{R})) \Rightarrow f$ ist über $[a,b]$ R-integrabel.

Substitutionsregel

Seien $f,g \in C^1(]a,b[)$. Dann gilt für $a < x_0 < x_1 < b$:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f'(\underbrace{g(x)}_{=u}) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{=du} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u)du}$$

Partielle Integration

Seien $u,v \in C^1(]a,b[)$, so dass $u(x) \cdot v'(x)$ eine SF besitzt. Dann besitzt $u'(x) \cdot v(x)$ auch eine SF und es gilt

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Bei periodischen Funktion

Bei Partieller Integration von zwei periodischen Funktionen geht man eine Periode durch und sotiert dann das "ursprüngliche Integral" auf die Linke Seite und kann so, dass Integral berechnen.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. So ist für jedes $c \in [a,b]$ die Integralfunktion

$$\boxed{F : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ mit } F(x) = \int_c^x f(t)dt}$$

differenzierbar und es gilt für alle $x \in [a,b]$: $F'(x) = f(x)$.

Anwendung: Parameterintegral

$$\frac{d}{dt}\int_a^{h(t)} g(x)dx = \frac{d}{dt}[G(x)]_a^{h(t)} = g(h(t)) \cdot h'(t)$$

Uneigentliches Riemann-Integral

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ über jedes kompakte Intervall $[c,d] \subset]a,b[$ R-integrabel. f ist über $]a,b[$ *uneigentlich R-integrabel*, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^0 f(x)dx + \lim_{d \to b^-} \int_0^d f(x)dx}$$

Satz: Reihenkonvergenz

Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ *monoton fallend*. Dann gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} f(x) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert}}$$

Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen (GDG)

Differentialgleichungen 1ter Ordnung

Homogene Lösung

Die Homogene Differentialgleichung 1ter Ordnung hat die Form:

$$\boxed{y'(x) - a(x)y(x) = 0}$$

Den Lösungsansatz nennt man *Seperation der Variablen*:

---

i) $y'(x) - a(x)y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = a(x)y(x)$

ii) Umformen auf folgende Form:

$$\tfrac{1}{y(x)}dy = a(x)dx$$

iii) Auf beiden Seiten integrieren:

$$\int \frac{1}{y(x)}dy = \int a(x)dx \Rightarrow \log(y(x)) = A(x) + C$$

iv) Auf beide Seiten e^x anwenden:

$$\boxed{y_h(x) = e^{A(x)} \cdot C}$$

Bemerkung: $A(x)$ ist die SF von $a(x)$ und C die Integrationskonstante.

Inhomogene Differentialgleichungen 1ter Ordnung

Eine Inhomogene Differentialgleichung 1ter Ordnung hat die Form:

$$\boxed{y'(x) - a(x)y(x) = b(x)}$$

Den Lösungsansatz nennt man *Variation der Konstanten*:

---

i) Die homogene Lösung $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ berechnen.

ii) Man macht den Ansatz, dass C von x abhängt:

$$y_h(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$$

iii) Man berechnet $y_h'(x)$:

$$y_h'(x) = C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)}$$

iv) $y_h'(x)$ und $y_h(x)$ in die ursprüngliche DGL einsetzen:

$$C'(x)e^{A(x)} \underbrace{+C(x)a(x)e^{A(x)} - C(x)a(x)e^{A(x)}}_{=0} = b(x)$$

v) Gleichung umstellen und dann Integrieren:

$$C'(x) = \frac{b(x)}{e^{A(x)}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx + K$$

vi) Gefundes $C(x)$ in $y_h(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$ einsetzen, dies ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen

Sei $F(t) \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Folgende Gleichung

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = A \cdot F(t)}$$

ist die Standardform eines homogenen Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $F(t), F_0 \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Das folgende *Anfangswertproblem*

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = A \cdot F(t), \quad F(0) = F_0}$$

besitzt *genau* eine Lösung $F \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$.

Die Fundamentallösung

Folgende Matrix-wertige Funktion $\Phi(t) \in C^1(\mathbb{R}, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$

$$\boxed{t \mapsto \Phi(t) := Exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}}$$

besitzt die erwünschten Eigenschaften

$$\frac{d\Phi}{d} = A \cdot \Phi(t),\ \Phi(0) = id$$

Sie heisst Fundamentallösung von dem System $\dot{F} = AF(t)$.

Die Fundamentallösung einer diagonalisierbaren Matrix

Sei A diagonalisierbar (A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix), d.h.:

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} \qquad \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Wobei T die n Eigenvektoren von A als Spaltenvektoren enthält.

In einem solchen Fall nimmt die Fundamentallösung folgende Form an:

$$\boxed{\Phi(t) = Exp(tA) = T \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}}$$

Wir wissen ausserdem, dass alle Lösungen von folgender Form sind:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

wobei $B_i \in \mathbb{R}^n$.

Reduktion der Ordnung

Die Allgemeine Form einer DGL n-ter Ordnung ist:

$$\boxed{f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{f} + a_0 f = 0}$$

Die Reduktion zu einem System 1.Ordnung ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Der Exponentialansatz

Wir wissen dank der Fundamentallösung, dass man Lösungen der Form

$$\boxed{f(t) = e^{\lambda t}} \qquad (\text{wobei } \dot{f} = \lambda e^{\lambda t}, \dots, f^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t})$$

sucht. Setzt man diesen Lösungsansatz in die allgemeine Form ein

$$\boxed{\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}_{p(\lambda)} = 0}$$

dann kriegt man das *charakteristische Polynom* $p(\lambda)$ der linearen GDG.

Beziehung zum charakteristischen Polynomen der Matrix A

Die Beziehung zum charakteristischen Polynom der Matrix $A_{n\times n}$ ist:

$$\boxed{\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n p(\lambda)}$$

Der Lösungsraum

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Der Lösungsraum

$$\boxed{X_A = \{F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n);\ \dot{F} = AF\}}$$

bildet ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum (Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$).

Analoges gilt für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$:

$$\tilde{X}_A = \{F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n);\ \dot{F} = AF\}$$

bildet ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Korollar

Sei $a = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Der Lösungsraum

$$Z_a = \{f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n);\ f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = 0\}$$

ist ein n-dimensionaler Unterraum von $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Einschub: Der Fundamentalsatz der Algebra

Sei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $m_i \in \mathbb{N}$. Ein Polynom besitzt n Nullstellen in $\mathbb{C}$, d.h.:

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \qquad \text{wobei} \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n$$

wobei λ_i die Nullstellen mit jeweiliger Vielfachheit m_i sind.

Ableitungsoperator und Identitätsoperator

Die Ableitungsoperator ist eine lineare Abbildung:

$$\boxed{D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad f \mapsto \dot{f} = Df}$$

Bem: Der Identitätsoperator ($Id(f) = f$) ist offensichtlich auch linear.

Man kann das char. Polynoms $p(\lambda)$ auch, wie folgt, beschreiben:

$$\boxed{p(D) = \prod_{i=1}^{l} (D - \lambda_i \cdot Id)^{m_i}}$$

Beispiel

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \ \Rightarrow p(D)f = (D - Id)^2 f = (D - Id)(\dot{f} - f) = \ddot{f} - 2\dot{f} + f$

Der Hauptsatz vom Kapitel

Es sei eine DGL n-ter Ordnung in der allgemeinen Form:

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{f} + a_0 f = 0$$

Dann ist, gemäss Exponentialansatz, ihr charakteristisches Polynom:

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = 0}$$

Jede Lösung der Differentialgleichung ist darstellbar als Linearkombination folgender n linear unabhängigen Funktionen:

$$\boxed{f_{ik}(t) = t^k e^{\lambda_i t} \text{ wobei } 0 \leq k < m_i} \qquad \Rightarrow f(t) = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot f_{ik}$$

wobei die Koeffizienten $C_i \in \mathbb{R}$ durch die zur GDG dazugehörigen Anfangswerte $f(0), \dot{f}(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ bestimmt werden.

Bem: Diese Linearkombination bildet eine Basis vom Lösungsraum Z_a.

Inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Sei $F_{part} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine beliebige "*partikuläre*" Lösung von

$$\boxed{\dot{F} = AF(t) + B(t)}$$

Dann ist jede dazugehörige Lösung F von der Form

$$\boxed{F(t) = F_{part}(t) + F_{hom}(t)}$$

wobei F_{hom} eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{F} = AF(t)$ ist.

Eindeutigkeitssatz: Insbesondere gibt es zu jedem $F_0 \in \mathbb{R}^n$ stets genau eine Lösung $F(t)$ mit $F(0) = F_0$.

Allgemeines Vorgehen zur Berechnung der partikulären Lösung

Die partikuläre Lösung $F_{part}(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ löst folgende Gleichung:

$$\boxed{\dot{F}_{part} = AF_{part}(t) + B(t) \qquad \text{bzw. } f^{(n)} + \cdots + a_0 f = b(t)}$$

Das Vorgehen ist, wie folgt:

i) Den der Störfunktion $b(t)$ entsprechenden Ansatz suchen.
ii) Ableitungen des Ansatzes f_{part} berechnen.
iii) f_{part} mit ihren Ableitungen in die GDG einsetzen.
iv) Die Koeffizienten vom Lösungsansatz durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen.

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz**
$b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$	$y_p(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$ falls 0 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls 0 eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls α keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls α eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = \cos(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$ $b(x) = \sin(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = \cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ \sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k \cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ x^k \sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$ $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $\alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.

Kochrezept: Vorgehen bei DGLs

1. Homogene Lösung bestimmen.
   - Charakteristisches Polynom bestimmen (Exponentialansatz)
   - Nullstellen bestimmen und im Hauptsatz einsetzen.
   - Komplex konjugierte imaginäre Nullstellen ersetzen durch das entsprechende cos/sin Paar.
2. Partikuläre Lösung bestimmen, falls eine Störfunktion vorhanden ist.
3. Anfangswertproblem auflösen.

Sonstiges

Harmonische Oszillatoren

Harmonische Oszillatoren besitzen folgende DGL:

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0, \, \omega_0^2 > 0 \qquad \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1, 2 = \pm i\omega_0$$

Die Allgemeine Lösung hat, unter anderem, folgende Formen:

$$f(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \qquad f(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Die Reelle Lösung (Physikalische) bildet man durch die Summe und Differenz der ersten Lösung unter Anwendung der Eulerschen Formel (Koeffizienten A,B erst am Schluss anfügen).

Erzwungene Schwingungen

Die folgende DGL einer erzwungene Schwingung wandelt man, wie folgt, zur Berechnung der partikulären:

$$\ddot{f} + 2\delta\dot{f} + \omega_0^2 f = \beta_0 \cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \ddot{f} + 2\delta\dot{f} + \omega_0^2 f = \beta_0 e^{i\omega t}$$

Benutzt man den Ansatz $f_{part} = c \cdot e^{i\omega t}$. So bekommt man:

$$c = \frac{\beta_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = \beta_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

Drückt man dies in der Polarform $R \cdot e^{i\varphi}$ aus:

$$R = \frac{\beta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \in]-\pi, 0[$$

Und setzt c wieder ein in f_{part}:

$$f_{part} = c \cdot e^{i\omega t} = R \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Nun kann man noch den Realteil nehmen und hat dann die gesuchte partikuläre Lösung:

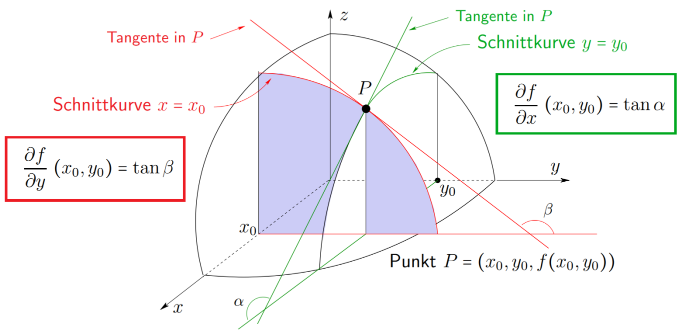
$$\tilde{f}_{part}(t) = \mathrm{Re}(f_{part}(t)) = R \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst in x_0 in Richtung $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$ partiell differenzierbar, falls folgender Grenzwert exisitert:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \partial_{x^i} f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_i) - f(x_0)}{h}$$



Tangentialebene

Die Tangentialebene ist die beste Approximation einer 2D-Funktion in der Nähe von (x_0, y_0). Sie ist, wie folgt, definiert:

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Differential

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Dann heisst $df_{x_0} := A$ (ein sogenannter co-Vektor) das Differential von f an der Stelle x_0 und desweiteren gilt

$$df_{x_0} \cdot (x - x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^0}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right] \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Bem: $dx^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ sind die Basiselemente von df_{x_0}.

Satz: Kriterium für C^1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, $f \in C^1(\Omega)$ falls:

i) f ist an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ in jede Richtung $\mathbf{e}_i$ partiell differenzierbar.

ii) Die Funktionen $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ sind auf Ω *stetig.*

Satz

$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ ist an jeder Stelle x_0 *differenzierbar und stetig* auf Ω.

Differentiationsregeln

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

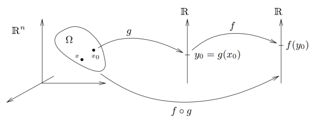
Summenregel:	$d(f+g)_{(x_0)} = df_{(x_0)} + dg_{(x_0)}$
Produktregel:	$d(f \cdot g)_{(x_0)} = df_{(x_0)} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg_{(x_0)}$
Quotientregel:	$d\left(\frac{f}{g}\right)_{(x_0)} = \frac{df_{(x_0)} \cdot g(x_0) - f(x_0) dg_{(x_0)}}{[g(x_0)]^2}$

Anwendung der Produktregel: $df^n = n \cdot f^{n-1} \cdot df$

Satz: Kettenregel 1. Version

Sei $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

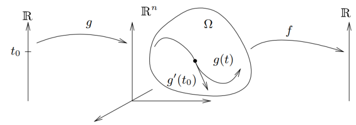
$$\underbrace{d(g \circ f)_{(x_0)}}_{\text{co-Vektor}} = f'(g(x_0)) \cdot \underbrace{dg_{(x_0)}}_{\text{co-Vektor}}$$



Satz: Kettenregel 2. Version

Sei $g :]a, b[\to \Omega$ an der Stelle $t_0 \in]a, b[$ differenzierbar und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ an der Stelle $g(t_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$(f \circ g)'(t_0) = \underbrace{df_{(g(t_0))}}_{\text{co-Vektor}} \cdot \underbrace{g'(t_0)}_{\text{Vektor}}$$



Richtungsableitungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist die Richtungsableitung eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ an einem Punkt x_0:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s \cdot \mathbf{v}) - f(x_0)}{s}$$

Satz

f ist differenzierbar in $x_0 \in \Omega \Rightarrow \partial_v f(x_0) = df_{(x_0)} \cdot \mathbf{v}$

Vektorfelder

Funktionen der Form $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heissen Vektorfelder. Jeder Stelle im Definitionsbereich wird ein Vektor zugeordnet.

Gradientenfeld

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit der dazugehörigen 1-Form $\lambda = df$. Das zur 1-Form zugehörige Vektorfeld heisst Gradientenfeld und ist

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

i) $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ gibt die Richtung des "steilsten Anstiegs" an.
ii) $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ist orthogonal zu den "Levelmengen".

Höhere Ableitungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist $f \in C^2(\Omega)$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^1(\Omega), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

D.h. falls **alle** zweiten part. Ableitungen existieren und stetig auf Ω sind.

Satz von Hermann Schwarz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $f \in C^1(\Omega)$ heisst von der Klasse C^m, $f \in C^m(\Omega)$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Notation (Multi-Index Schreibweise)

Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und $\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!$. Dann gelten für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ folgende Notationen:

i) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

ii) $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$

iii) $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$

Der Satz von Taylor

Sei $f \in C^m(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$. Für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $c \in [x, y]$, so dass

$$f(y) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq (m-1)} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)(y - x)^\alpha}_{=: T_{m-1} f(y, x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(c)(y - x)^\alpha}_{\text{Restterm}}$$

$T_k f(y, x)$ heisst das Taylor-Polynom $k - ter$ Ordnung von $f(y)$ mit dem Entwicklungspunkt x.

Taylorentwicklung für $n = 2$ und $m = 2$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x) \cdot (y_1 - x_1) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x) \cdot (y_2 - x_2) \\ &+ \tfrac{1}{2!}\,[\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c)(y_1 - x_1)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c)(y_2 - x_2)^2 \\ &+ 2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c)(y_2 - x_2)(y_1 - x_1)] \end{aligned}$$

Korollar

Die Taylorentwicklung gibt die beste Approximation um x:

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - T_m f(y, x)}{||y - x||^m} = 0$$

Hesse-Matrix

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(\Omega)$. Die Hesse-Matrix von f am Punkt x ist:

$$Hess_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_i \partial y_i}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$Hess_f(x)$ ist symmetrisch $\Rightarrow$ $Hess_f(x)$ *diagonalisierbar* mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Einschub: Definitheit einer Matrix

i) Eine Matrix ist **positiv definit**, falls alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$.
ii) Eine Matrix ist **negativ definit**, falls alle Eigenwerte $\lambda_i < 0$.
ii) Eine Matrix ist **indefinit**, falls positive und negative Eigenwerte.

Kritischer Punkt

Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $df_{(x_0)} = 0$ (*Koordinatenweise* $= 0$!) heisst kritischer Punkt von f.

Satz

Sei $f \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$. Ein kritischer Punkt x_0 ist eine

i) strikte lokale Minimastelle, falls $Hess_f(x_0)$ positiv definit ist.
ii) strikte lokale Maximastelle, falls $Hess_f(x_0)$ negativ definit ist.
iii) ein Sattelpunkt, falls $Hess_f(x_0)$ indefinit ist.

Bem: Bei degenerierten Punkten ($\det(Hess_f(x_0)) = 0$) kann man mit diesem Ansatz keine Aussage über lokales Min/Max/Sattelpunkt treffen!

Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$. f heisst in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls alle Komponenten von f in x_0 differenzierbar sind.

Das Differential mit Einheitsvektoren heisst *Jacobi-Matrix* ($M_{l\times n}(\mathbb{R})$):

$$df_{(x_0)} = \begin{pmatrix} df^1_{(x_0)} \\ \vdots \\ df^l_{(x_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^l}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Differentiationsregeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Es gilt

i) $d(f+g)_{x_0} = df_{(x_0)} + dg_{(x_0)}$
ii) $d\langle f, g\rangle_{(x_0)} = \sum_{i=1}^{l} \left(f^i(x_0) \cdot dg^i_{(x_0)} + g^i(x_0) \cdot df^i_{(x_0)}\right)$

Kettenregel 3te Version

Seien $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ an $g(x_0)$ differenzierbar.

$$d(f \circ g)_{(x_0)} = \underbrace{df_{(g(x_0))}}_{\in M_{m\times l}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{dg_{(x_0)}}_{\in M_{l\times n}(\mathbb{R})}$$

Es empfiehlt sich stark für g und f andere Koordinaten zu benutzen!

Der Umkehrsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $df_{(x_0)} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar ($\det(df_{(x_0)}) \neq 0$) an einer Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren Umgebungen

$$\exists r > 0 \text{ so dass } f : \underbrace{B_r(x_0)}_{:=U} \to \underbrace{f(B_r(x_0))}_{:=V}$$

invertierbar ist und es existiert ein $g : V \to U$ so dass

$$g(f(x)) = x,\ \forall x \in U, \quad f(g(y)) = y,\ \forall y \in V$$

und $g \in C^1(V, U)$ wobei $dg_{(f(x))} = (df_{(x)})^{-1}$. ($^{-1} \mathrel{\hat{=}}$ Matrixinverse!)

Diffeomorphismus

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U; V)$. Die Abbildung Φ heisst ein *Diffeomorphismus* von U auf $\Phi(U) = V$, falls Φ *injektiv ist* und falls die Umkehrabbildung Φ^{-1} von der Klasse $C^1(V; U)$ ist.

Aus dem Umkehrsatz folgt: Eine differenzierbare Abbildung mit invertierbarem Differential ist *lokal* ein Diffeomorphismus.

Anwendung: Polarkoordinanten

Die Abbildung $f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad df_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

erfüllt die Bedingungen vom Umkehrsatz, da

$$\det(df_{(r,\varphi)}) = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r > 0$$

Man kann also *lokal* folgende Umkehrabbildung einführen:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

Implizite Funktionen

Das Ziel ist es die Levelmengen / Höhenlinien ($f^{-1}(\{c\})$) zu beschreiben.

Satz

Sei $\Omega \subset (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Man hat also *eine Variable der Funktion isoliert*: $f(\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^{n-1}}, \underbrace{y}_{\in\mathbb{R}})$.

Sei ein Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_y f_{(x_0,y_0)} \neq 0$. Dann existiert lokal eine Umgebung von (x_0, y_0) und eine Funktion h:

$$h : B_r^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}$$

sodass, die Höhenlinie $f(x_0, y_0) = 0$ durch h beschrieben wird:

$$\{(x, y) \in U;\ f(x, y) = 0\} \quad = \quad \{(x, h(x));\ x \in B_r^{n-1}(x_0)\}$$

Insbesondere gilt $h(x_0) = y_0$ und $f(x_0, h(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Ausserdem ist $h \in C^1(B_r^{n-1}(x_0), \mathbb{R})$ und das Differential ist:

$$dh_{(x_0)} = -\frac{1}{\partial_y f_{(x_0,h(x_0))}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \partial_{x_i} f_{(x_0,h(x_0))}\, dx_i}_{=d_x f}$$

wobei $d_x f$ das Differential von f ist ohne den Koordinaten y.

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz: Lagrange-Multiplikatorenregel

Sei $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit wiederum isolierter Variable: $(\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^{n-1}}, \underbrace{y}_{\in\mathbb{R}})$.

Sei (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Und (x_0, y_0) bildet *ein lokales Minimum (bzw. Maximum)* für die Einschränkung von f auf die Höhenlinie $g^{-1}(\{0\})$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange Multiplikator), so dass

$$df_{(x_0,y_0)} + \lambda \cdot dg_{(x_0,y_0)} = 0$$

Bemerkung: Dies ist eine Addition von co-Vektoren, welches zu einem **Gleichungssystem** führt. (Koordinatenweise $= 0$!)

Achtung: Die Einschränkung $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$ muss beachtet werden! Die Punkte, welche deswegen wegfallen können trotzdem ein Extrema sein, d.h. am Schluss vergleichen mit den Punkten vom Verfahren. Beispiel: Auf $B_1^2(0)$ wären diese Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$.

Nebenbedingungen: Einfache Randmengen

Der Rand vom Einheitskreis ist: $\partial B_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Vorgehen: Globale Extremewerte bestimmen

1. Argumentieren, wieso die Menge Kompakt ist.
   - Abgeschlossenheit: Menge duch *stetige* Funktionen abgegrenzt, es folgt die Menge enthält alle Randpunkte.
   - Beschränktheit: Auf die Ungleichung verweisen.
   - Kompakt: Folgern das die Menge Kompakt ist und Extremumsatz gilt.
2. Kritische Punkte im Inneren bestimmen (Kandidaten für Extrema).
3. Alle Kandidaten für Extrema *auf dem Rand der Menge* bestimmen. Man kann hier entweder Lagrange verwenden oder das alternative Vorgehen (siehe unten).
4. Die Randpunkte, welche nicht erfasst werden könnnen bestimmen, **auch Kandidaten**!
5. Alle Kandidaten in f einsetzen und Minimum/Maximum bestimmen.

Alternatives Vorgehen für das Bestimmen der Kandidaten auf dem Rand

Diese Vorgehen bietet sich gut an, wenn der Rand nicht durch eine einzige Nebenbedingungen darstellbar ist. Vorgehen:

1. Man parametrisiert den Rand mithilfe von Wegen $\gamma_i(t)$, $t \in [a, b]$.
2. Man betrachtet für jeden Weg γ_i die Funktion $f(\gamma_i)$ und analysiert, ob $f(\gamma_i)$ einen kritischen Punkt aufweist ($f'(\gamma_i) = 0$).
3. Man **überprüft**, ob der kritische Punkt überhaupt in t drinnen ist.
4. Man nimmt zusätzlich **alle Randpunkte der Wege** als Kandidaten auf, d.h. a, b eingesetzt in ihr γ_i sind auch Kandidaten!

Wegintegrale

Differentialform (1-Form)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, welche jedem $x \in \Omega$ eine lineare Abbildung $\lambda(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zuordnet, heisst Differentialform vom Grad 1. Es gilt ausserdem folgende Äquivalenz:

$$\boxed{\text{1-Form: } \lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i} \Leftrightarrow \text{Vektorfeld: } V(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$ die Basiselemente von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind.

Bemerkung: Für jedes $f \in C^1(\Omega)$ ist das Differential df eine 1-Form.

Wegintegral

Ein Weg ist eine vektorwertige Funktion $\gamma \in C^1_{stw}([a, b], \mathbb{R}^n)$. Man sagt:

i) $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ sind seine Anfangs- und Endpunkte.
ii) Die Ableitung $\dot{\gamma}$ ist der Geschwindigkeitsvektor.
ii) Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, dann heisst γ abgeschlossen.

Sei $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{stw}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$:

$$\gamma : [0, 2] \to \Omega \text{ mit } t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t-1) & t \in [1, 2] \end{cases}$$

Es gilt ausserdem: $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$

Das Wegintegral

Sei $\gamma \in C^1_{stw}([a, b], \mathbb{R}^n)$ und λ eine 1-Form mit dem zu λ zugehörigem Vektorfeld V. Dann ist das Wegintegral:

$$\boxed{\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \Leftrightarrow \int_\gamma V\, d\vec{s} = \int_a^b \langle V_i(\gamma(t)), \dot{\gamma} \rangle dt}$$

Das Wegintegral ist *unabhängig* von orientierungserhaltenden Umparametrisierungen von γ.

Einschub: Wegzusammenhängend

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ω heisst *wegzusammenhängend*, falls jedes Paar von Punkten in Ω mit einem Weg verbunden werden kann.

Satz

Sei Ω offen und Wegzusammenhängend.

$$\boxed{f \in C^1(\Omega) \text{ mit } df = 0 \Leftrightarrow f \text{ ist konstant}}$$

Einschub: Parametrisierungen

Gerade von a nach b:	$\gamma(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b$	$t \in [0, 1]$
Kreis (positiven Sinne):	$\gamma(t) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$	$t \in [0, 2\pi]$
Kreis (*negativen* Sinne):	$\gamma(t) = (r \cdot \cos(\varphi), -r \cdot \sin(\varphi))$	$t \in [0, 2\pi]$
Ellipse (positive Sinne):	$\gamma(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$	$t \in [0, 2\pi]$

Potentiale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\lambda \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine 1-Form. Es sind **äquivalent**:

i) $\exists f \in C^1(\Omega)$ mit $\boxed{\lambda = df}$ (f heisst "Potential von λ")

ii) Für je zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{stw}([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, d.h. mit *gleichen Anfangs- und Endpunkten*, gilt:

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

iii) Für jeden **geschlossenen** Weg $\gamma \in C^1_{stw}([a, b], \Omega)$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$:

$$\boxed{\int_\gamma \lambda = 0} \qquad \text{("}V \text{ ist } \textit{konservativ}\text{")}$$

Bem: Potentiale sind bis auf die Addition einer Konstante bestimmt!

Verfahren zur Berechnung eines Potentials

Sei λ eine 1-Form. Das zugehörige Potential f, falls es existiert, kann man mit folgendem Verfahren ermitteln:

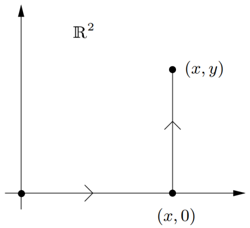
i) Wir setzen oBdA: $f(0, 0, 0) = 0$

ii) Wir nehmen die folgenden drei Wegintegrale:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t\,x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ t\,y \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t\,z \end{pmatrix}$$

iii) Aus dem zweiten Punkt im vorherigen Satz folgt:

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda + \int_{\gamma_3} \lambda$$



iv) Zum Schluss: **Verifizieren**, dass f wirklich das Potential von λ ist:

$$\boxed{df(x, y, z) = \lambda}$$

Satz: Potentialfeld

Für ein Vektorfeld $V \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

$$\boxed{V \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \exists f \in C^1(\Omega) : V = \nabla f}$$

In diesem Fall heisst V **Potentialfeld** mit dem Potential f.

Korollar: Rotationsvektorfeld

Sei $V = (V_1, \dots, V_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ konservativ. Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial V^i}{\partial x^j} - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} = 0, \quad \forall 1 \le i, j \le n}$$

Integration in $\mathbb{R}^n$

Riemannsches Integral über einen Quader

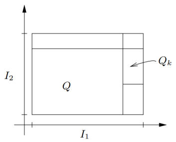
Ein n-dimensionaler *Quader* ist ein Produkt von Intervallen

$$Q = \prod_{i=1}^{n} I_i = \{x = (x^i)_{1 \le i \le n}; x^i \in I_i, 1 \le i \le n\}$$

Solch ein Quader Q hat den folgenden *Elementarinhalt*:

$$\boxed{\mu(Q) = \mu([a, b] \times [c, d]) = \prod_{i=1}^{n} |I_i|}$$

Die *Zerlegung* $P = \{Q_k; 1 \le k \le K\}$ eines Quaders in disjunkte Teilquader $Q = \bigcup_{k=1}^{K}$ hat folgende *Feinheit*:



$$\delta_P = \max_{1 \le k \le K} diam(Q_k)$$

wobei $diam(Q_k)$ den *Durchmesser* von Q_k bezeichnet:

$$diam(Q_k) = \sup_{x, y \in Q_k} |x - y|, 1 \le k \le K$$

Treppenfunktion in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q heisst Treppenfunktion, falls $f(x)$ eine Darstellung folgender Form besitzt

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x) \text{ wobei } \chi_{Q_k}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in Q_k \\ 0 & , x \notin Q_k \end{cases}}$$

mit einer Zerlegung $P = \{Q_k; 1 \le k \le K\}$ und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$.

Das Riemann-Integral einer Treppenfunktion $f(x)$ ist, wie folgt definiert:

$$\boxed{\int_Q f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \mu(Q_k)}$$

Satz: Verfeinerung der Zerlegung

Eine Zerlegung $\tilde{P} = \{\tilde{Q}_j;\ 1 \le j \le J\}$ ist eine Verfeinerung der Zerlegung $P = \{Q_k; 1 \le k \le K\}$, falls jedes $\tilde{Q}_j$ in einem Quader Q_k enthalten ist.

Das Integral wird durch eine Verfeinerung **nicht** verändert.

Das Riemann Integral

Seien e^-, e^+ Treppenfunktionen und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

Untere R-Integral von f: $\boxed{\underline{\int_Q} f(x)\, d\mu = \sup_{e^-(x) \le f(x)} \int_Q e^-(x)\, d\mu}$

Obere R-Integral von f: $\boxed{\overline{\int_Q} f(x)\, d\mu = \inf_{f(x) \le e^+(x)} \int_Q e^+(x)\, d\mu}$

Die Funktion f heisst *R-integrabel* über Q, falls

$$\boxed{\underline{\int_Q} f(x)\, d\mu = \overline{\int_Q} f(x)\, d\mu =: \int_Q f(x)\, d\mu}$$

Satz

Sei $f \in C^0(Q)$. Dann ist f über Q R-integrabel.

Satz: Riemannsche Summen

Für jede Folge von Zerlegungen $(P^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ von Q mit Feinheit $\delta_{P^{(l)}} \xrightarrow{l\to\infty} 0$ gilt für eine beliebige Auswahl von Punkten $x_k^{(l)} \in Q_k^{(l)}$ stets

$$\int_Q \left(\sum_{k=1}^{K^{(l)}} f(x_k^{(l)}) \chi_{Q_k^{(l)}} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{K^{(l)}} f(x_k^{(l)}) \cdot \mu(Q_k^{(l)}) \xrightarrow{l\to\infty} \int_Q f\, d\mu$$

Eigenschaften des Riemannschen Integrals

Linearität

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und über Q R-integrabel, und $a \in \mathbb{R}$.

$$\int_Q (\alpha \cdot f(x) + g(x))\, d\mu = \alpha \cdot \int_Q f(x)\, d\mu + \int_Q g(x)\, dx$$

Monotonie

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und über Q R-integrabel, und sei $f \leq g$.

$$\int_Q f(x)\, d\mu \leq \int_Q g(x)\, d\mu$$

Insbesondere gilt für $f \in C^0(\overline{Q})$ die Abschätzung

$$\left| \int_Q f(x)\, d\mu \right| \leq \int_Q |f(x)|\, d\mu \leq \sup_Q |f(x)| \cdot \mu(Q)$$

Korollar

Seien $f, f_k \in C^0(\overline{Q})$ mit $f_k \xrightarrow{glm.} f (k \to \infty)$. Dann gilt

$$\left| \int_Q f_k\, d\mu - \int_Q f\, d\mu \right| \leq \int_Q |f_k - f|\, d\mu \leq ||f_k - f|| \cdot \mu(Q) \xrightarrow{(k\to\infty)} 0$$

Gebietsadditivität

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und über Q R-integrabel. Sei $P = \{Q_k ; 1 \leq k \leq K\}$ eine Zerlegung von Q in disjunkte Quader Q_k. Dann gilt

$$\int_Q f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K} \int_{Q_k} f(x)\, d\mu$$

Satz von Fubini

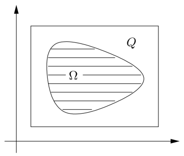
Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ **und** sei $f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f(x, y)\, d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Analoges gilt auch in höheren Dimensionen, solange $f \in C^0(Q)$ ist.

Jordan-Bereiche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Q ein *beliebiger* Quader mit $\Omega \subset Q$.



Sei χ_Ω die charakteristische Funktion:

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

Jordan-messbar (JM)

Die Menge Ω heisst *Jordan-messbar*, falls $\chi_\Omega(x)$ R-integrabel über Q ist, diese Eigenschaft ist vom Quader Q das Ω enthält **unabhängig**.

Das n-dimensionale Jordansche Mass von Ω: $\mu(\Omega) = \int_Q \chi_\Omega(x)\, d\mu$

Satz

Seien Ω_1, Ω_2 *JM*. Dann sind $\Omega_1 \cap \Omega_2$ und $\Omega_1 \cup \Omega_2$ auch *JM* und

$$\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) = \mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

R-Integral über Jordan-messbare Bereiche

Sei $\Omega \subset Q$ *JM* und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt. f heisst **R-Integrabel über** Ω , falls die Fortsetzung $\overline{f}$ von f über Q R-integrabel ist und es gilt:

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega \end{cases} \qquad \int_\Omega f\, d\mu := \int_Q \overline{f}\, d\mu$$

Satz

Sei Ω *JM* und $f \in C^0(\Omega)$ beschränkt. Dann ist f auf Ω R-Integrabel.

Hypograph und Hypergraph

Sei $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\psi \in C^0_{stw}(\overline{Q'})$ mit $\psi \geq 0$. Dann ist die Menge

$$\Omega_\psi = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n ;\, x' \in Q',\, 0 \leq x_n \leq \psi(x')\}$$

Jordan-messbar und heisst **Hypograph**.

Sei $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\phi \in C^0_{stw}(\overline{Q'})$ mit $\phi \leq 0$. Dann ist die Menge

$$\Omega_\phi = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n ;\, x' \in Q',\, \phi(x') \leq x_n \leq 0\}$$

Jordan-messbar und heisst **Hypergraph**.

Die Beschränkung der Menge ist flexibel, also man kann auch:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\, x \in [a, b],\, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Das zugehörige Integral ist für den Fall $\mathbb{R}^2$:

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Satz von Green

Sei $\Omega \subset Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet der Klasse C^1_{stw} und $g, h \in C^1(\overline{\Omega})$. Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) d\mu = \int_{\partial\Omega} \underbrace{g(x, y)\, dx + h(x, y)\, dy}_{:=\lambda}$$

wobei der Rand von Ω so parametrisiert wird, dass Ω **zur Linken** liegt.

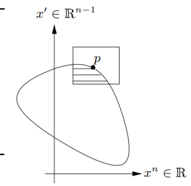
Gebiet der Klasse C^1_{stw} in $\mathbb{R}^2$

Sei $\Omega \subset Q$ (beschränkt). Ein Gebiet Ω ist von der Klasse C^1_{stw}, falls **zu jedem** Punkt $p \in \partial\Omega$ folgendes existiert:

i) Falls notwendig, *eine Drehung der Koordinatenachsen*, d.h. von (x, y) zu (x_1, x_2):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ii) Es $\exists$ ein Quader $[a, b] \times [c, d]$ in den neuen Koordinaten (x_1, x_2), welcher $p \in (a, b) \times (c, d)$ erfüllt.



iii) Es $\exists \psi \in C^1_{stw}([a, b], [c, d])$ und die Schnittmenge $\Omega \cap (a, b) \times (c, d)$ ist ein *Hyper-/Hypograph.*

Satz von Green mit Vektorfeld

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse C^1_{stw}. Sei $V = \begin{pmatrix} V_1(x, y) \\ V_2(x, y) \end{pmatrix}$ ein $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ Vektorfeld. Dann gilt:

$$\mathrm{rot}(V) = \partial_x V_2(x, y) - \partial_y V_1(x, y) \qquad \int_\Omega \mathrm{rot}(V)\, d\mu = \int_{\partial\Omega} V\, d\vec{s}$$

wobei $\mathrm{rot}(V)$ die Rotation von V ist und $\partial\Omega$ ist so parametrisiert, dass Ω **zur Linken** liegt.

Bem: Wenn $rot(V) = 1$ ist, dann kann man *die Fläche* $\mu(\Omega)$ berechnen.

Satz von Poincaré

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes C^1_{stw} Gebiet und sei V ein $\mathbb{R}^2$-Vektorfeld der Klasse $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$V \text{ ist konservativ } (V = \nabla f) \Leftrightarrow \mathrm{rot}(V) = 0$$

Einschub: Einfach zusammenhängende Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, von der Klasse C^1_{stw} und wegzusammenhängend. Ω heisst einfach zusammenhängend, falls $\partial\Omega$ nur eine 'Komponente' hat.

Informell: Ω besitzt keine 'Löcher'.

Substitutionsregel

Einschub: Diffeomorphismus

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U;V)$. Die Abbildung Φ heisst ein Diffeomorphismus von U auf $\Phi(U) = V$, falls Φ *injektiv ist* und falls die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} \in C^1(V;U)$.

Aus dem Umkehrsatz folgt: $\Phi \in C^1(U;V)$ Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\Phi \text{ injektiv und } det(d\Phi_{(x_0)}) \neq 0, \forall x_0 \in U}$$

Transformationssatz

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Dann ist $\Phi(\Omega)$ Jordan messbar, und

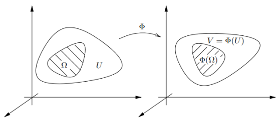
$$\boxed{\mu(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det(d\Phi(x))| d\mu(x)}$$

wobei $\mu(\Phi(\Omega))$ das **Volumen** von $\Phi(\Omega)$ ist.

Satz: Substitutionsregel

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus von U auf $V \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset U$ beschränkt und Jordan messbar, und sei $f : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\Phi(\Omega)} f\, d\mu = \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\det(d\Phi)|\, d\mu}$$



Einschub: Verschiede Koordinatentransformationen

Die folgenden Koordinatentransformationen sind ein Diffeomorphismus, wie von der Substitutionsregel verlangt.

Polarkoordinaten: $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\varphi)}) = r$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0, x \leq 0\}$.

Zylinderkoordinaten: $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(r, \varphi, h) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\varphi,h)}) = r$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0, x \leq 0\}$.

Kugelkoordinaten: $\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(r, \Theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\sin(\Theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\Theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\Theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\Theta,\varphi)}) = r^2\sin(\Theta)$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0, x \leq 0\}$.

Oberflächenmass und Flussintegral

Lokale Immersion

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ *injektiv*. Φ bildet eine lokale Immersion, falls $d\Phi(x) \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ **für alle** $(x,y) \in U$ regulär ist ($Rang = 2$).

$$\boxed{\text{Rang}(d\Phi) = 2 \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0}$$

Bem: Diese Bedingung ist notwendig, damit es lokal eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ abbildet (schöne Oberfläche), sonst wäre es lokal teils eine Linie.

Bem: Sei $\psi \in C^1(Q, \mathbb{R})$ wobei $Q = [a,b] \times [c,d]$ mit $\phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}$.

Dann ist $\phi(x,y)$ *immer* eine lokale Immersion.

Der Oberflächeninhalt

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Der 2-dimensionale Flächeninhalt von $S = \Phi(\overline{\Omega})$ ist

$$\boxed{\mu_2(\Phi(\Omega)) := \int_\Omega \underbrace{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}_{=:do} = \int_S do}$$

wobei do der *skalare Flächeninhalt* bezüglich Φ ist.

Das Integral einer Funktion über eine Oberfläche

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Sei $S = \Phi(\Omega)$ das zugehörige Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ und $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Integral von f auf S:

$$\boxed{\int_S f do := \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}$$

Normalenvektor

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Der Normaleinheitsvektor n zur Fläche $\Phi(U) = S$ ist:

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi}{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi||}}$$

Das Flussintegral

Sei $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Dann ist der Fluss von V durch die Fläche $S = \Phi(\overline{\Omega})$:

$$\boxed{\int_S V \cdot \vec{n}\, do = \int_\Omega (V \circ \Phi) \cdot \frac{\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi}{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi||} ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}$$

Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Die Rotation eines $\mathbb{R}^3$ Vektorfeld

Sei ein Vektorfeld $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die *Rotation* von V:

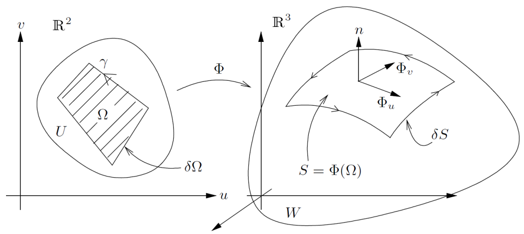
$$\text{rot}(V) = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}V_3 - \partial_{x_3}V_2 \\ \partial_{x_3}V_1 - \partial_{x_1}V_3 \\ \partial_{x_1}V_2 - \partial_{x_2}V_1 \end{pmatrix}$$

Satz von Stokes

Sei Φ eine lokale Immersion von $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ in C^1_{stw}, Jordan messbar und beschränkt. Sei $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{S=\Phi(\Omega)} \text{rot}(V) \cdot \vec{n}\, do &= \int_\Omega (\text{rot}(V) \circ \Phi) \cdot (\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi) d\mu \\ &= \int_{\partial\Omega} (V \circ \Phi) \cdot \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma) dt = \int_{\partial S} V d\vec{s} \end{aligned}}$$

In Worten: Der Fluss von $\text{rot}(V)$ durch eine Fläche gleicht der Zirkulation vom Vektorfeld V seinem Rand entlang.



Der Satz von Gauss

Divergenz eines Vektorfeldes

Die Divergenz ("Quellstärke") eines Vektorfeldes $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ist:

$$\text{div}(V) = \partial_x V_1(x,y,z) + \partial_y V_2(x,y,z) + \partial_z V_3(x,y,z)$$

Satz von Gauss in $\mathbb{R}^2$

Sei Ω ein C^1_{stw} Gebiet mit dem zu $\partial\Omega$ zugehörigen Tangentialvektor $\dot{\gamma}$. Sei ν der Normalvektor zum Rand ("äussere Normale"). Dann gilt:

$$\nu = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} \qquad \boxed{\int_\Omega \text{div}(V) = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu\, d\vec{s}}$$

Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sei ein Vektorfeld $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sei $\psi \in C^1(Q := [a,b] \times [c,d], \mathbb{R}_+)$ mit dem Hypographen $\Omega_\psi = \{x \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in Q, 0 \leq x_3 \leq \psi(x_1, x_2)\}$. Wir setzen vorraus, dass $V = 0$ für $x_3 \leq 0$ und für $(x_1, x_2) \notin Q$. Es gilt:

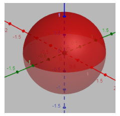
$$\boxed{\int_{\Omega_\psi} \text{div}(V) d\mu = \int_Q V(\Phi) \cdot (\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi)\, d\mu} \quad \phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}$$

In Worten: Das Integral von $\text{div}(V)$ in Ω_ψ gleicht dem Fluss von V durch die Fläche von $\psi(x,y)$.

Beispiel eines Oberflächenintegrals

Wir berechnen die Oberfläche $S = \Phi(B_1^2(0))/2$ (nur obere Halbkugel).

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$



Wir bekommen also:

$$\partial_x\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \qquad \partial_y\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

Wir benutzen nun die Substitutionsregel mit Polarkoordinaten:

$$\mu_2(S) = \int\limits_{B_1^2(0)} ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\Theta = 2\pi$$

Wir integrieren nun die Höhe $f(x,y,z) = z$ auf der Oberfläche S:

$$\int\limits_S f do = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^1 \frac{r\cdot\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\Theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi = \frac{1}{2}\mu_2(S)$$

Punktmengen

Sei der Radius $r > 0$ und der Index 0 markiert das Zentrum. Dann gilt:

Kreis: $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$

Kugel: $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2\}$

Zylinder: $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,\ 0 \le z \le h\}$

Kegel: $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = \frac{r^2}{h^2}(h-z)^2\right\}$

Ellipse: $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = r^2\right\}$

Ellipsoid: $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = r^2\right\}$

Volumen eines Ellipsoid

Für eine Berechnung des Volumens eines Ellipsoids benutzt man die folgendermassen angepassten Kugelkoordinanten:

$$F(r,\Theta,\varphi) := \begin{pmatrix} a\cdot r\sin(\Theta)\cos(\varphi) \\ b\cdot r\sin(\Theta)\sin(\varphi) \\ c\cdot r\cos(\Theta) \end{pmatrix} \text{ und } \det(dF_{(r,\Theta,\varphi)}) = abc\cdot r^2\sin(\Theta)$$

$\int_{E(a,b,c,R)} 1 d\mu = \int_{B_R(0)} |\det dF(x,y,z)| dzdydx = abc\mu\,(B_R(0))$

Kochrezepte

Integralgrenzen von einem Hyper- und Hypograph bestimmen

1. Die Variable für das äusserste Integral wählen (oft x), alle anderen Variablen in der Mengengleichung auf 0 setzen. Nun kann man die Grenze für die erste Variable herauslesen.

2. Die Variable vom zweitäussersten Integral (oft y) auswählen, alle anderen Variablen in der Menge **ausser die schon bestimmte Variable** auf 0 setzen.

2.5 Analoger Schritt für die 3te Variable.

3. Nun hat man die Integralgrenzen bestimmt und kann fortfahren mit der Berechnung vom Integral.

Kochrezept Volumenberechnung

1. Das Integrationsgebiet $\Phi(\Omega)$ (bzw. Integrationsgrenzen) bestimmen in den passenden Koordinatentransformationen.

   Achtung: Auf die Einschränkungen der Koordinatentransformation achten (z.B. $r \in]0,\pi[$).

1.5 Evtl. bemerken, dass die Koordinatentransformation eine Halbebene nicht trifft, dies aber vernachlässigbar ist beim Transformationssatz.

2. Den Transformationssatz anwenden ($\det(d\Phi)$ nicht vergessen).

Kochrezept Oberflächeninhalt

1. Die Menge anschauen und bestimmen um was für ein Objekt es sich handelt, Skizzen helfen! **Man berechnet die Oberfläche stückweise**. Einfache Fläche, wie Kreisflächen, kann man direkt mit den bekannten Formeln berechnen.

2. Schwerere Oberflächen muss man mit folgendem Vorgehen berechnen:
   - Eine Achse vorläufig entfernen, d.h. Variable auf 0 setzen in der Mengengleichung. Man schaut von nun an von dieser Achse aus auf das Objekt. (z.B.: Man entfernt $z \Rightarrow$ man schaut von oben).
   - Skizze von dem neuen 2D-Gebiet erstellen und dann die Ungleichungen (am Ende die Integralgrenzen) der zwei übrig bleibenden Variablen für das 2D-Gebiet bestimmen.
   - Mit der ursprünglichen Mengengleichung eine Funktion $\psi(x,y)$ für die entfernte Variable bestimmen. **Achtung**: Es kann sein, dass hier zwei Funktionen herauskommen, in diesem Fall muss man den Oberflächeninhalt für **beide** berechnen (evtl. Symmetrie!).
   - Lokale Immersion der Form $\phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}$ bilden.
   - Oberflächeninhalt(e) berechnen mit der bekannten Formel, das Integrationsgebiet ist das zuvor bestimmte 2D-Gebiet.

3. **Alle** Oberflächeninhalt zusammenaddieren.

Einfache Geometrieformeln

	Fläche/Volumen	Umfang/Oberfläche
Kreis	$A = \pi r^2$	$U = 2\pi r$
Kugel	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$
Ellipsoid	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	
Zylinder	$V = \pi r^2 h$	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2+r^2}$

Tabelle mit Ableitungen und Stammfunktionen

$f'(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\underset{\int f(x)dx}{\leftrightarrows}}$	$f(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\underset{\int f(x)dx}{\leftrightarrows}}$	$F(x)$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x(\log\lvert x\rvert - 1)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\log\lvert\cos(x)\rvert$
$\frac{1}{\log(a) \cdot x}$	$\log_a \lvert x\rvert$	
$\log(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{1}{\log(a)}a^x$
$x^x(\log(x)+1)$	x^x	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$	
$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$	$\lvert x\rvert$	

Bemerkung: Bei Ableitungen mit Logarithmen, sowie den inversen Trigo- und Hyperfunktionen ist der Definitionsbereich eingeschränkt!

Stetige Funktionen

Folgende Elementarfunktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich:

i) Polynome sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$.
ii) Rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ sind stetig auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; q(z) \neq 0\}$.
iii) Die Wurzelfunktion ist auf $\mathbb{R}_+$ stetig.
iv) Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ stetig.
v) Die Logartihmusfunktion ist auf $]0, \infty[$ stetig.

Partialbruchzerlegung

Ziel: Rationale Funktionen $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$ in Teilbrüche zerlegen. Vorgehen:

i) Wenn der Zähler einen höheren Grad als den Nenner hat, muss man zuerst eine Polynomdivision durchführen, d.h. $(p(x) : q(x) = \dots)$.

ii) Das Nennerpolynom $q(x)$ in Nullstellenform bringen.

$$q(x) = \prod_{i=1} (x - x_i)^{m_i} \qquad \text{wobei } (x - x_i) = 0$$

iii) a) Die Nullstelle hat Multiplizität 1 ($m_i = 1$):

$$\frac{C}{(x - x_i)}$$

b) Die Nullstelle hat Multiplizität grösser 1 ($1 < m_i$):

$$\frac{C_1}{(x-x_i)} + \frac{C_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{C_{m_i}}{(x-x_i)^{m_i}}$$

c) Die Nullstelle ist komplexwertig (Gewünschte Form: $ax^2 + bx + c$):

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)}$$

iii) Alle Koeffizienten C_i bestimmen durch einen Koeffizientenvergleich.

Ergänzungen aus LinAlg

Determinante

Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Dann ist die Determinante:

$$\boxed{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc}$$

Laplace Entwicklung

Sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. Die Entwicklung nach Zeile 2 ist:

$$\det(A) = -a_2 \cdot \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} - c_2 \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Für die Vorzeichen gilt zu beachten: $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte einer Matrix A berechnet man mit

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Der zum Eigenwert λ_i dazugehörige Eigenvektor $\mathbf{s}_i$ berechnet man durch das Auflösen von folgendem homogenen LGS:

$$\boxed{(A - \lambda_i I) \cdot \mathbf{s}_i = \mathbf{0}}$$

Diagonalisierbar

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{s}_1$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Dann ist A diagonalisierbar:

$$\boxed{A = SDS^{-1} = [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n]^{-1}}$$

Matrixinverse berechen

Zuerst Gauss-Elimination, dann Rücksubstitution ($[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$)

Explizite Formeln

Für $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gilt:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Spass mit Integralen

Tangenssubstitution

Sei $t(x) = \tan(\frac{x}{2})$ mit $x \in]-\pi, \pi[$. Dann gilt

$\cos(x) = \frac{1-t^2(x)}{1+t^2(x)}$	$\sin(x) = \frac{2t(x)}{1+t^2(x)}$
$\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2(x)}$	$\sin^2(x) = \frac{t^2(x)}{1+t^2(x)}$

Mit dieser Substitution kann man gewisse Trigonometrische Integrale einfacher lösen.

Rückwärtssubstitution

Die Substitutionsregel lässt sich auch rückwärts durchführen. Sei $\varphi(x)$ *injektiv.* Dann gilt:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$$

Bei geschickter Wahl der Funktion $\varphi(x)$ kann entgegen des ersten Anscheins der Integrand vereinfacht werden.

Tabelle

Bem: Nach Anwendung der Regel ist die Trigo-Identiät ($cos^2(x) + sin^2(x) = 1$) notwendig!

Integral	**Rücksubstitution**		
$\int_\alpha^\beta \sqrt{1-t^2}dt$	$\varphi(x) = \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin(t)$	$\varphi'(x) = \cos(x)$
$\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2-t^2}dt$	$\varphi(x) = a \cdot \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$	$\varphi'(x) = a \cdot \cos(x)$
$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}dt$	$\varphi(x) = a \cdot \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$	$\varphi'(x) = a \cdot \cos(x)$
$\int_\alpha^\beta \sqrt{1+t^2}dt$	$\varphi(x) = \sinh(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arsinh}(t)$	$\varphi'(x) = \cosh(x)$
$\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2-1}dt$	$\varphi(x) = \cosh(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arcosh}(t)$	$\varphi'(x) = \sinh(x)$

Integrale über eine Periode (Orthogonalitätsrelationen)

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Relationen:

$\int_0^T \sin(n\omega t)dt = 0$	$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = 0$
$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}$	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}$
$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$	

Liste von Trigonometrischen Integralen

Man kann diese Integrale *normalerweise* benutzen bei der Prüfung, solange man auf die Identität vermerkt. Man setzt dabei einfach die Integralgrenzen ein, wie man es intuitiv machen würde.

$\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln\lvert\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\rvert + C$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \ln\lvert\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\rvert + C$
$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{sin^2(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\tan(x)}dx = \ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C$
$\int \sin(x)\cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\frac{1}{\tan(x)} + C$
$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x)) + C$	$\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$	$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)dt = \frac{3\pi}{4}$	$\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^3(t)dt = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \pi$	$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt = 0$
$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$	

Tabelle von ausgewerteten Integralen

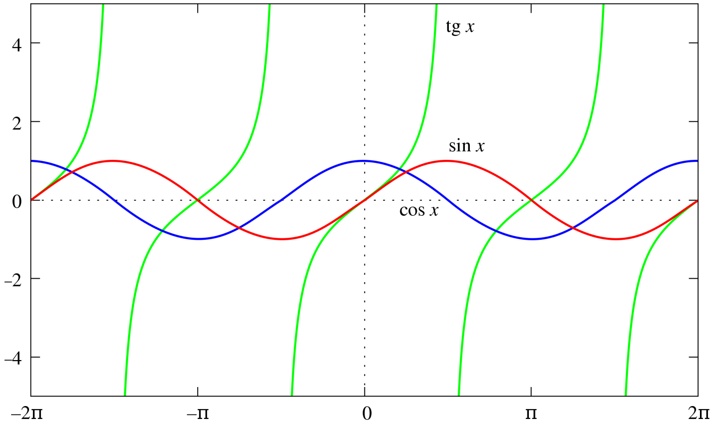
Mit der Begründung "Symmetrie" ist es normalerweise erlaubt die *Nullintegrale* der Tabelle zu benutzen.

Den Rest der Tabelle würde ich nur zur Überprüfung der Resultate an der Prüfung verwenden. Denke nicht, dass es Pünkte gibt, wenn man direkt das Resultat schreibt.

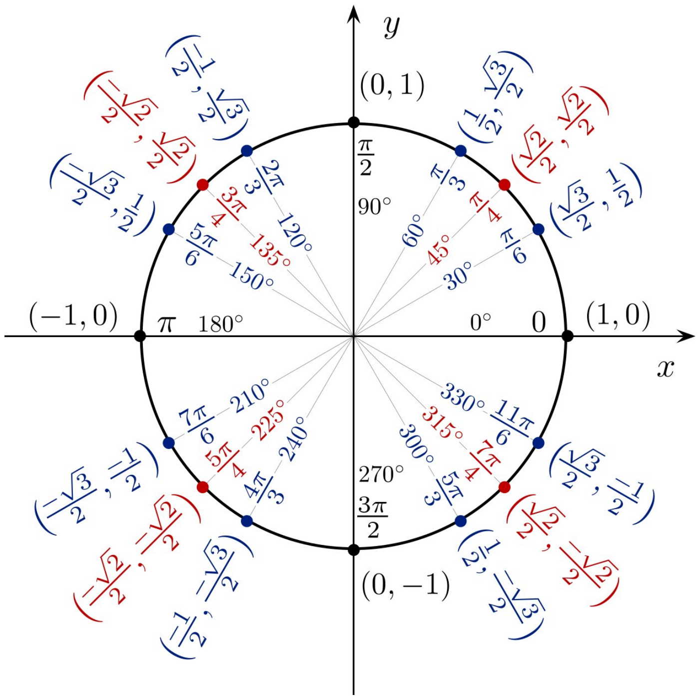
Funktion:	**Integralgrenzen:**						
	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2(x)$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3(x)$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2(x)$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3(x)$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin \cdot \cos(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2 \cdot \cos(x)$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin \cdot \cos^2(x)$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Relevante Plots

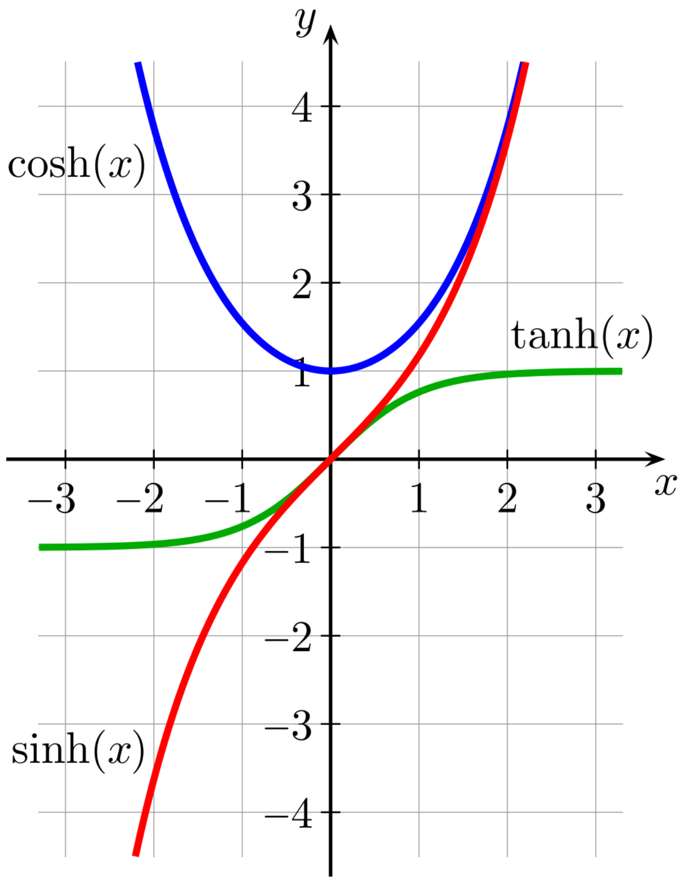
Trigonometrische Funktionen



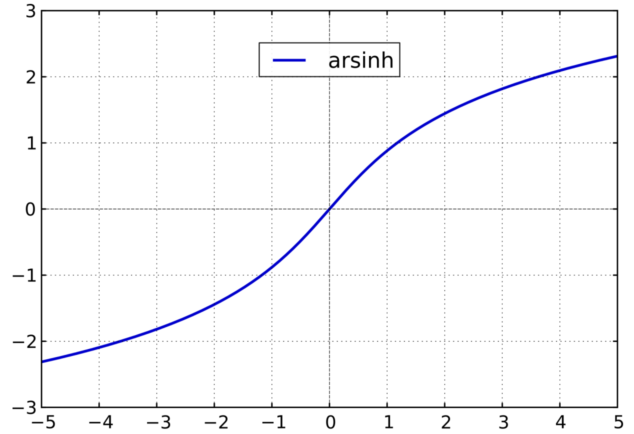
Einheitskreis

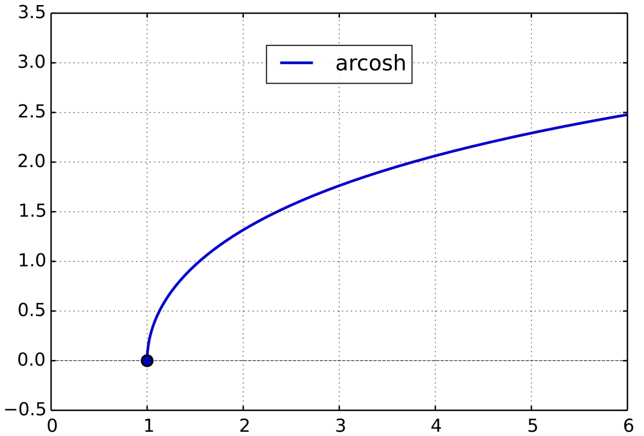


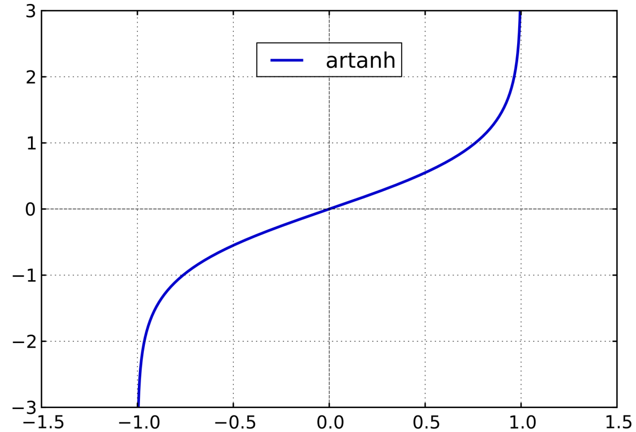
Hyperbelfunktionen



Areafunktionen (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen)







Kochrezepte

Überprüfung auf Differenzierbarkeit

Meistens ist der Ursprung $(0,0)$ gefragt mit Funktionen, welche bis auf den Ursprung differenzierbar sind. Das allgemeine Vorgehen ist:

i) Auf Stetigkeit überprüfen. **Polarkoordinantentrick**:

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ mit } x = r \cdot \cos(\varphi) \text{ und } y = r \cdot \sin(\varphi)$$

Falls $\lim\limits_{r \to r_0}$ unabhängig von φ existiert, dann ist f stetig in (x_0, y_0).

Unstetigkeit zeigen: Man untersucht die Grenzwerte verschiedener Folgen $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ und $(0, \frac{1}{n})$ und zeigt, dass zwei Unterschiedliche Grenzwerte vorhanden sind.

ii) Differenzierbarkeit überprüfen: Partielle Ableitungen bestimmen und Definition Differenzierbarkeit einsetzen (evtl. Polarkoordinantentrick für Grenzwert benutzen).

Nicht differenzierbar zeigen: Neben Unstetigkeit in (x_0, y_0) oder Unstetigkeit von $\partial_x f, \partial_y f$ kann man auch zeigen, dass für $\vec{v} = h \cdot (v_1, v_2)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(x_0)}{h}$$

unterschiedliche Werte, z.B. links- und rechtsseitiger Grenzwert sind nicht gleich, besitzt. Oder man zeigt, dass die Richtungsableitungen nicht linear von v abhängen.

Überprüfen auf Stetigkeit

Neben den schon oben erwähnten Tricks, gibt es noch ein Paar weitere Hinweise:

Beim δ, ϵ-Kriterium oder gleichmässige Konvergenz benötigt man oft die Dreiecksungleichung (oft mit einer verschwindenden $\pm$-Term Addition) oder die binomischen Formeln.

Überprüfung Gleichmässige Konvergenz

1. Punktweisen Limes von f_n auf Ω für fixes $x \in \Omega$ berechnen, d.h.

   $$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

   Kann verschiedene Werte annehmen, je nach Punkt x_0!

2. Prüfe f_n auf gleichmässige Konvergenz. Vorgehen:

   a) Berechne $\sup\limits_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$. Oft ist es von Vorteil die **Ableitung** $\frac{d}{dx}|f_n(x) - f(x)|$ zu berechnen und **gleich Null zu setzen**, um das Maximum der Menge zu bestimmen.

   b) Bilde den Limes für $n \to \infty$: $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$, konvergiert dies für $n \to \infty$ so gilt gleichmässige konvergenz.

   Indirekte Methoden:

   a) f unstetig $\Rightarrow$ keine gleichmässige Konvergenz

   b) f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ gleichmässige Konvergenz