DISCLAIMER

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung «Lineare Algebra» (HS26) von M. Schmid.

Ich übernehme keine Haftung für mögliche Fehler in der Zusammenfassung. Bitte beachten Sie, dass diese Zusammenfassung unter Zuhilfenahme von Gemini Notebook erstellt wurde. Obwohl KI ein leistungsstarkes Werkzeug ist, kann sie technische Ungenauigkeiten oder sogenannte „Halluzinationen“ erzeugen. Darüber hinaus habe ich Abschnitte paraphrasiert und eigene Beobachtungen hinzugefügt, was weitere Fehlerquellen darstellen kann.

Urheberrecht & Inhaltlicher Hinweis: Dies ist eine inoffizielle Ressource; sie steht in keiner Verbindung zur ZHAW und wird von dieser nicht unterstützt. Da diese Zusammenfassung mit Hilfe von KI erstellt wurden, kann ich nicht garantieren, dass alle Inhalte ausreichend umformuliert wurden. Einige Abschnitte können den ursprünglichen Präsentationsfolien oder Skripten stark ähneln oder diese direkt zitieren. Alle geistigen Eigentumsrechte am ursprünglichen Kursinhalt verbleiben bei den jeweiligen Autoren der ZHAW.

Hinweis für Rechteinhaber: Dieses Dokument wird ausschliesslich zu Bildungszwecken geteilt. Wenn Sie Rechteinhaber sind und der Aufnahme bestimmter Inhalte widersprechen, kontaktieren Sie mich bitte, und ich werde diese umgehend entfernen.

Sofern nicht anders angegeben, wurden alle Grafiken persönlich erstellt.

Fehler können per E-Mail an ruhjir01@students.zhaw.ch gemeldet werden.

Jirayu Ruh

12. November 2026

ZP Lineare Algebra

von J. Ruh, Fehler bitte an ruhjir01@students.zhaw.ch

Reelle Zahlen & Körperaxiome

Zahlmengen & Hierarchie

- **Mengen:** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{ggT}(m, n) = 1 \right\}$
- $\mathbb{R}$: Reelle Zahlen (inkl. Irrationale wie $\sqrt{2}, \pi$)

▸ Formulae S. 11

Körperaxiome $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$:

- **Addition (+):**
  - Assoziativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - Kommutativ: $a + b = b + a$
  - Neutrales El.: $a + 0 = a$
  - Inverses El.: $a + (-a) = 0$
- **Multiplikation (·):**
  - Assoziativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - Kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$
  - Neutrales El.: $a \cdot 1 = a$
  - Inverses El.: $a \cdot a^{-1} = 1$ für $a \neq 0$
- **Distributivität:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

▸ Formulae S. 14

Grundlegende Eigenschaften

- **Keine Nullteiler:** $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ oder $b = 0$.
- **Eindeutigkeit:** Neutrale und inverse Elemente sind eindeutig.

▸ Formulae S. 25

Komplexe Zahlen

▸ Formulae S. 18 - 19

Definition & Kartesische Form

- **Imaginäre Einheit:** $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$
- **Kartesische Form:** $z = x + iy \in \mathbb{C}$
  - $x = \text{Re}(z) \in \mathbb{R}$ (Realteil)
  - $y = \text{Im}(z) \in \mathbb{R}$ (Imaginärteil)

Rechnen in $\mathbb{C}$

- **Addition/Subtraktion:** $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- **Multiplikation:** $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- **Komplexe Konjugation:** $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$
  - $z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$
  - $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
  - $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- **Betrag:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0$
  - Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$
- **Division:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Polarform & Exponentialform

- **Eulersche Formel:** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- **Polarform:** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
  - Radius: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - Argument: $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \in (-\pi, \pi]$
- **Multiplikation/Division:**
  - $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
  - $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- **Potenzen (Moivre):** $z^n = r^ne^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
- **n-te Wurzeln:** $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, ..., n - 1$

Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

- $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Falls Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$: komplexe Lösungen $z_{1,2} \in \mathbb{C}$.

Vektoren im $\mathbb{C}^n$, Geraden & Normen

Standardraum K^n

- **Elemente:** Spaltenvektoren $(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in K^n$ ($K = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$)
- **Nullvektor:** $(0) = (0, ..., 0)^T$
- **Inverse Element:** $-(x) = (-x_1, ..., -x_n)^T$

▸ Formulae S. 27

Vektorraumaxiome

Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in K^n$ und $\lambda, \mu \in K$:

- **Addition:** Assoziativ, Kommutativ, Neutrales El. $\vec{0}$, Inverses $-\vec{v}$.
- **Skalarmultiplikation:**
  - $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$
  - $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
  - $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
  - $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

▸ Formulae S. 27

Geraden im $\mathbb{R}^n$

- **Parameterdarstellung:** $g : \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}\ (t \in \mathbb{R})$
  - $\vec{r}_0$: Stützvektor (Punkt auf g)
  - $\vec{v} \neq \vec{0}$: Richtungsvektor
- **Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$:**
  - Identisch ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ kollinear, Aufpunkt auf anderer)
  - Parallel ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ kollinear, kein Schnittpunkt)
  - Schneidend ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. unabh., 1 Schnittpunkt)
  - Windschief ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. unabh., kein Schnittpunkt)

▸ Formulae S. 101

Norm (Vektorlänge)

- **Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$:** $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}$
- **Euklidische Norm im $\mathbb{C}^n$:** $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\vec{x}^T|\vec{x}|}$
- **Axiome einer Norm:**
  1. Positiv definit: $|\vec{x}| \geq 0$, $|\vec{x}| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
  2. Absolute Homogenität: $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$
  3. Dreiecksungleichung: $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$
- **Einheitsvektor:** $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (Länge 1)

Skalarprodukt & Orthogonalprojektion

Standardskalarprodukt

- **Im $\mathbb{R}^n$:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{x}^T \vec{y}$
- **Im $\mathbb{C}^n$:** $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |y|_i = \vec{x}^T |\vec{y}|$
- **Eigenschaften (über $\mathbb{R}$):**
  - Symmetrisch: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
  - Bilinear: $(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{z}) + \mu(\vec{y} \cdot \vec{z})$
  - Positiv definit: $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2 \geq 0, = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
- **Eigenschaften (über $\mathbb{C}$):**
  - Hermitesch: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{(\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle)}$
  - Sesquilinear: Linear im 1. Argument, semilinear (konjugiert) im 2. Argument.

Winkel & Orthogonalität

- **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:** $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$
- **Winkel im $\mathbb{R}^n$:** $\cos\theta = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ mit $\theta \in [0, \pi]$
- **Orthogonalität:** $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
- **Satz von Pythagoras:** $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow |\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$

Orthogonalprojektion

Projektion von $\vec{v}$ auf die Richtung von $\vec{u} \neq \vec{0}$:

- **Projektionsvektor:** $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left(\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \left(\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u}$
- **Orthogonale Komponente:** $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$ mit $\vec{v}_\perp \perp \vec{u}$
- **Zerlegung:** $\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) + \vec{v}_\perp$

▸ Formulae S. 104

Vektorprodukt, Spatprodukt & Ebenen

▸ Formulae S. 104 - 106

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$

- **Berechnung:** $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- **Geometrische Eigenschaften:**
  - Orthogonalität: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a}$ und $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}$
  - Betrag: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\theta$
  - Orientierung: Rechte-Hand-Regel $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right)$
- **Rechenregeln:**
  - Antikommutativ: $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$
  - Kollinearität: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}, \vec{b}$ lin. abhängig
  - Distributiv: $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Geometrische Anwendungen

- **Parallelogrammfläche:** $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$
- **Dreiecksfläche:** $A = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$
- **Spatprodukt:** $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$
- **Spatvolumen:** $V = \left|\left(\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle\right)\right|$
- **Tetraedervolumen:** $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle\right)\right|$
- **Höhe des Spats:** $h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\left|\left(\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle\right)\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$

- **Parameterform:** $E : \vec{r}(s,t) = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}\ (s,t \in \mathbb{R})$
- **Normalenvektor:** $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$
- **Koordinatenform:** $ax + by + cz = d$ mit $\vec{n} = (a,b,c)^T$ und $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0$
- **Hesse-Normalform:** $\dfrac{\vec{n} \cdot \vec{r} - d}{|\vec{n}|} = 0$
- **Abstand Punkt $P\,(\vec{r}_P)$ zu Ebene E:** $D = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{r}_P - d|}{|\vec{n}|}$

Matrizenrechnung & Spezielle Matrizen

▸ Formulae S. 27 - 30

Begriff & Dimension

- **Definition:** $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit m Zeilen, n Spalten.
- **Nullmatrix 0:** Alle Einträge $= 0$.
- **Einheitsmatrix I_n:** $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Matrixoperationen

- **Addition:** $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (gleiche Dimension $m \times n$)
- **Skalarmultiplikation:** $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$
- **Matrixprodukt $A \cdot B$:** Für $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$ ist $C = AB \in K^{m \times p}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{(Zeile } i \text{ mal Spalte } j\text{)}$$

  - **Nicht kommutativ:** Im Allgemeinen $AB \neq BA$.
  - **Assoziativ:** $(AB)C = A(BC)$
  - **Distributiv:** $A(B + C) = AB + AC$
- **Transponierte Matrix $A^T \in K^{n \times m}$:** Vertauschen von Zeilen & Spalten:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

  - $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$
- **Hermitesch-Konjugierte $A^* \in C^{n \times m}$:**

$$A^* = |A|^T = \left(|a|_{ji}\right)$$

  - $(AB)^* = B^* A^*$

Spezielle Matrizen

- **Symmetrisch:** $A^T = A\ (a_{ij} = a_{ji})$
- **Skew-symmetrisch:** $A^T = -A\ (a_{ii} = 0)$
- **Hermitesch (selbstadjungiert):** $A^* = A\ (|a|_{ji} = a_{ij})$
- **Orthogonal:** $A^T A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T$ (Spalten bilden Orthonormalbasis)
  - Spalten $\vec{a}_i$ sind normiert $|\vec{a}_i| = 1$ und paarweise orthogonal $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$.
- **Unitär:** $A^* A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^*$ (Spalten bilden Orthonormalbasis)

Lineare Gleichungssysteme & Gauss

Aufbau eines LGS

System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, ..., x_n$:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- **Erweiterte Koeffizientenmatrix:** $\left(A \mid \vec{b}\right) \in K^{m \times (n+1)}$

▸ Formulae S. 33

Gauss-Algorithmus (ZEL-Transformationen)

Erlaubte Zeilenumformungen (ändern Lösungsmenge nicht):

1. Vertauschen zweier Zeilen ($Z_i \leftrightarrow Z_j$)
2. Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ ($\lambda Z_i \to Z_i$)
3. Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen ($Z_i + \lambda Z_j \to Z_i$)

▸ Formulae S. 135

Zeilenstufenform (ZSF) & Rang

- **Zeilenstufenform:** Erste Nicht-Null-Einträge pro Zeile (Pivots) rücken stufenförmig nach rechts.
- **Rang einer Matrix rang(A):** Anzahl der Pivotelemente (Nicht-Null-Zeilen) in der ZSF von A.
- **Eigenschaften des Rangs:** $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Lösbarkeit & Lösungsmenge

Vergleich von $r = \text{rang}(A)$ mit $r_b = \text{rang}\left(A \mid \vec{b}\right)$

- **Inkonsistent (keine Lösung):** $r < r_b$ (Widerspruch: $[0 \ldots 0 \mid b_k]$ mit $b_k \neq 0$)
- **Konsistent (lösbar):** $r \geq r_b$
  - **Eindeutige Lösung:** $r = n$ (Rang = Anzahl Unbekannte, kein freier Parameter)
  - **Unendlich viele Lösungen:** $r < n$ ($n - r$ freie Parameter / Freiheitsgrade)
- **Struktur der Lösungsmenge:** $L = \vec{x}_p + \ker(A)$
  - $\vec{x}_p$: Eine spezielle (partikuläre) Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$
  - $\ker(A)$: Allgemeines Lösungssystem des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$

Homogene LGS, Kern & Bild

Homogene LGS

- **Form:** $A\vec{x} = \vec{0}$ (m Gleichungen, n Unbekannte)
- **Triviale Lösung:** $\vec{x} = \vec{0}$ existiert IMMER.
- **Nicht-triviale Lösungen:** Existieren genau dann, wenn $\text{rang}(A) < n$.

Kern einer Matrix ($\ker(A)$)

- **Definition:** $\ker(A) = \left\{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\right\} \subseteq K^n$
- **Unterraum-Eigenschaft:** $\ker(A)$ ist ein Untervektorraum von K^n.
- **Berechnung:**
  1. Bringen von A auf Zeilenstufenform durch Gauss-Algorithmus.
  2. Identifikation der freien Variablen (Spalten ohne Pivot).
  3. Ausdrücken der Pivot-Variablen durch die freien Parameter.
  4. Aufstellen der Basisvektoren des Kerns.
- **Dimension:** $\dim \ker(A) = n - \text{rang}(A)$ (Nullität).

▸ Formulae S. 28

Bild einer Matrix ($\text{im}(A)$)

- **Definition:**

$$\text{im}(A) = \{\vec{y} \in K^m \texttt{ mid } \exists \vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{y}\} = \text{span}(\text{Spalten von } A) \subseteq K^m$$

- **Unterraum-Eigenschaft:** $\text{im}(A)$ ist ein Untervektorraum von K^m.
- **Berechnung der Basis von im(A):**
  1. Bringen von A auf Zeilenstufenform.
  2. Identifikation der Pivot-Spalten im Endschema.
  3. Die entsprechenden Spalten der **URSPRÜNGLICHEN** Matrix A bilden eine Basis von $\text{im}(A)$.
- **Dimension:** $\dim \text{im}(A) = \text{rang}(A)$ (Rang).

Rang-Nullitäts-Satz (Dimensionssatz)

Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ gilt:

$$\dim \ker(A) + \dim \text{im}(A) = n \quad (\text{Anzahl Spalten von } A)$$

- **Invertierbarkeitskriterium (für $n \times n$-Matrizen):**

$$\begin{aligned} A \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \\ &\Leftrightarrow \ker(A) = \left\{\vec{0}\right\} \\ &\Leftrightarrow \text{im}(A) = K^n \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

▸ Formulae S. 30, 34