DISCLAIMER

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung «Analysis I» von Marcello Robbiani.

Ich übernehme keine Haftung für mögliche Fehler in der Zusammenfassung. Bitte beachten Sie, dass diese Zusammenfassung unter Zuhilfenahme von Gemini Notebook erstellt wurde. Obwohl KI ein leistungsstarkes Werkzeug ist, kann sie technische Ungenauigkeiten oder sogenannte „Halluzinationen“ erzeugen. Darüber hinaus habe ich Abschnitte paraphrasiert und eigene Beobachtungen hinzugefügt, was weitere Fehlerquellen darstellen kann.

Urheberrecht & Inhaltlicher Hinweis: Dies ist eine inoffizielle Ressource; sie steht in keiner Verbindung zur ZHAW und wird von dieser nicht unterstützt. Da diese Notizen mit Hilfe von KI erstellt wurden, kann ich nicht garantieren, dass alle Inhalte ausreichend umformuliert wurden. Einige Abschnitte können den ursprünglichen Präsentationsfolien oder Skripten stark ähneln oder diese direkt zitieren. Alle geistigen Eigentumsrechte am ursprünglichen Kursinhalt verbleiben bei den jeweiligen Autoren der ZHAW.

Hinweis für Rechteinhaber: Dieses Dokument wird ausschliesslich zu Bildungszwecken geteilt. Wenn Sie Rechteinhaber sind und der Aufnahme bestimmter Inhalte widersprechen, kontaktieren Sie mich bitte, und ich werde diese umgehend entfernen.

Sofern nicht anders angegeben, wurden alle Grafiken persönlich erstellt.

Fehler können per E-Mail an ruhjir01@students.zhaw.ch gemeldet werden.

Jirayu Ruh

ZP Analysis I

von J. Ruh, Fehler bitte an ruhjir01@students.zhaw.ch

Reelle Funktionen & Folgen

Reelle Funktionen

- **Reelle Funktionen:** Abbildung $f : A \to B, x \mapsto f(x)$
  - **Definitionsbereich (D_f):** Menge aller zulässigen x-Werte
  - **Zielbereich (B) / Wertebereich (W_f):** Erreichte Bildwerte $W_f \subseteq B$
- **Polynomfunktionen:** $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$
  - **Grad 0 (konstant):** $p(x) = a_0$
  - **Grad 1 (linear):** $p(x) = mx + q$ (Steigung m, y-Achsenabschnitt q)
  - **Grad 2 (quadratisch):** $p(x) = ax^2 + bx + c$ (Parabel)
  - **Grad 3 (kubisch):** $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Reelle Folgen

- **Reelle Folgen:** Abbildung $n \mapsto a_n = a(n)$ für $n \in \mathbb{N}$
  - **Arithmetische Folge:** $a_n = a_1 + (n-1)d$ (konstante Differenz d)
  - **Geometrische Folge:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (konstanter Quotient q)
  - **Polynomiale Folge:** z. B. $a_n = n^2 + 2n + 1$
  - **Approximation von e:** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$
- **Summenfolge / Reihe:** $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$
- **Visualisierung:** Funktionsgraphen und Punktgraphen

Ableitung & Differentialgleichung

Ableitung

- **Differenzenquotient (Mittlere Änderungsrate / Sekantensteigung):**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- **Differentialquotient (Lokale Änderungsrate / Tangentensteigung):**

$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- **Ableitungsregeln:**
  - **Potenzregel:** $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
  - **Faktorregel:** $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
  - **Summenregel:** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
  - **Produktregel:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  - **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
  - **Kettenregel:** $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ («äussere · innere»)

Differentialgleichung

- **Differentialgleichungen (DGL) verifizieren:** Einsetzen der Funktion $y(t)$ und ihrer Ableitungen in die DGL.
  - $y'(t) = ay(t) \Rightarrow y(t) = y(0)e^{at}$
  - $y''(t) = -\omega^2 y(t) \Rightarrow y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Integralrechung & Aufleitung

- **Unbestimmtes Integral & Stammfunktion:**

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\partial x = F(x) + C$$

- **Substitutionsregel (Grundform / Kette rückwärts):**

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

- **Kinematik (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung):**

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$v(t) = \int a(t)dt + v_0, \quad x(t) = \int v(t)dt + x_0$$

Freier Fall ($a = -g$): $v(t) = -gt + v_0 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.

- **Bestimmtes integralegral & Hauptsatz:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

  - Lineare Eigenschaft: $\int_a^b (c_1f + c_2g)dx = c_1\int_a^b fdx + c_2\int_a^b gdx$
  - integralervalladditivität: $\int_a^c fdx + \int_c^b fdx = \int_a^b fdx$
- **Flächenberechnung:**
  - Fläche unter Graph: $A = \int_a^b |f(x)|\ dx$ (Nullstellen als integralervallgrenzen nutzen)
  - Zwischen zwei Kurven: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$
- **Numerische integralegration (Riemann-Summen & Trapezregel):**
  - Riemann-Summe: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$
  - Trapezregel mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right] \cdot \Delta x$$

Appendix

Rechnen mit Exponenten

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$

Rechnen mit Logarithmen

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^p) = p\log(x)$$

$$\log_{a(x)} = \frac{\log_{b(x)}}{\log_{b(a)}}$$

Einige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \text{für jedes } n \text{ und } a > 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{a(x)}}{x^n} = 0 \quad \text{für jedes } n > 0 \text{ und } a > 1$$

Endliche und unendliche Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{falls } q \neq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q(1-q^n)}{1-q} \quad \text{falls } q \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

Ableitung grundlegeneder Funktionen

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a), \quad a > 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_{a(x)} = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2}(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2}(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Winkeladditionsformeln

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$